



Rapports de Recherche

N° 2

**RÉSOLUTION NUMÉRIQUE
D'UN DÉPLACEMENT DIPHASIQUE
EN MILIEU POREUX
EN PRÉSENCE DE GRAVITÉ
ET DE FORCES CAPILLAIRES**

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105 78150 Le Chesnay
France
Tél. 954 90 20

Gabriella SALZANO

Janvier 1980

RESOLUTION NUMERIQUE D'UN DEPLACEMENT DIPHASIQUE
EN MILIEUX POREUX EN PRESENCE DE GRAVITE ET DE FORCES CAPILLAIRES

Gabriella SALZANO

RESUME

Dans ce rapport on étudie le problème du déplacement unidimensionnel avec gravité de deux fluides immiscibles (eau et huile) dans un milieu poreux. L'équation qui régit ce déplacement est une équation aux dérivées partielles parabolique avec un terme de transport non monotone. On a associé à cette équation plusieurs types de conditions aux limites. On présente aussi de nombreux résultats numériques obtenus sur des données réalistes.

ABSTRACT

In this paper we study one-dimensional displacements of immiscible fluids (water and oil) in porous media including gravity effects. The equation modelling these displacements is a partial differential equation of parabolic type with a non monotonous transport term. With this equation, we have connected various boundary conditions. We also show many numerical results from realistic data.

PLAN

INTRODUCTION

CHAPITRE I - SEPARATION PAR GRAVITE DE DEUX FLUIDES IMMISCIBLES EN MILIEU POREUX

I.1 - ETUDE DU PROBLEME (1.0) \div (5.0) SANS CAPILLARITE

- 1 - Introduction
- 2 - Exposé de la méthode d'approximation
- 3 - Comparaison avec le schéma de Lesaint-Raviart [1]
- 4 - Comparaison avec le schéma utilisé dans Cohen [1]
- 5 - Etude du schéma (6.2), (7.2) pour $k = 0$
- 6 - Etude du schéma (6.2), (7.2) pour $k = 1$
- 7 - Détermination numérique des valeurs ξ_i^n , $i = 1, \dots, I+1$
- 8 - Résultats numériques (cas sans capillarité)

I.2 - ETUDE DU PROBLEME (1.0) \div (5.0) AVEC CAPILLARITE

- 9 - Introduction de la capillarité
- 10 - Etude du schéma (4.9), (5.9), (6.2) pour $k = 1$
- 11 - Conditions aux limites de l'équation avec capillarité
- 12 - Discrétisation des conditions aux limites (4.11), (3.11)
- 13 - Résultats numériques (cas avec capillarité)

CHAPITRE II - DEPLACEMENTS UNIDIMENSIONNELS AVEC GRAVITE

- 1 - Introduction
- 2 - Etude du schéma (7.1), (8.1), (9.1) pour $k = 1$
- 3 - Conditions aux limites et initiales
- 4 - Prolongement de la fonction $b(u)$
- 5 - Approximation numérique des fonctions $a(u)$, $\alpha(u)$, $c(u)$, $b(u)$
- 6 - Détermination numérique des valeurs $f(\xi_i^n)$, $i = 1, \dots, I+1$
- 7 - Résolution numérique des conditions aux bords
- 8 - Résultats numériques

INTRODUCTION

On considère un barreau de roche poreuse, vertical, imbibé de pétrole. On injecte de l'eau à une extrémité du barreau. L'eau pousse le pétrole selon les lois du déplacement dans un milieu poreux de deux liquides immiscibles incompressibles. (Marle [1]). En négligeant les variations de la concentra-

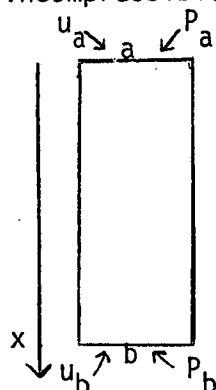


Figure 1

tion de l'eau perpendiculairement à l'axe du barreau, on peut donner une formulation unidimensionnelle du problème.

On notera a et b , les deux extrémités du barreau et,

$T > 0$, la durée des observations.

On pose $\Omega =]a, b[$ et $Q = \Omega \times]0, T[$.

Les équations qui règlent le déplacement des deux liquides immiscibles dans un barreau en présence de gravité, peuvent s'écrire suivant Chavent [1, 2]:

$$(1.0) \quad \Phi \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} [q \cdot b(u) - K c(u) \frac{\partial h}{\partial x}] = 0 \quad \text{dans } Q$$

où

$$(2.0) \quad q = -K d(u) \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u) \right] \frac{\partial h}{\partial x} \quad \text{dans } Q$$

avec

$$(3.0) \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } Q$$

et

$$(4.0) \quad r = -K \alpha'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{dans } Q$$

u est la saturation de l'eau ;

P est la pression "globale" (cf. Chavent [1]) ;

h est le potentiel de gravité ;

K et Φ sont la perméabilité absolue et la porosité du barreau ;

En appelant k_1 et k_2 les mobilités relatives de l'eau et de l'huile, ρ_1 et ρ_2 les masses volumiques des deux liquides, et $P_c(u)$ la pression capillaire, les fonctions α' , ρ , b , c , d sont définies par :

$$(5.0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'(u) = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} p'_c(u) \\ \rho(u) = \frac{k_1 \rho_1 + k_2 \rho_2}{k_1 + k_2} \\ b(u) = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \\ c(u) = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} (\rho_1 - \rho_2) \\ d(u) = k_1 + k_2 \end{array} \right.$$

Comme les fonctions k_1 et k_2 sont du type tracé sur la figure 2, la fonction $c(u)$ n'est pas monotone.

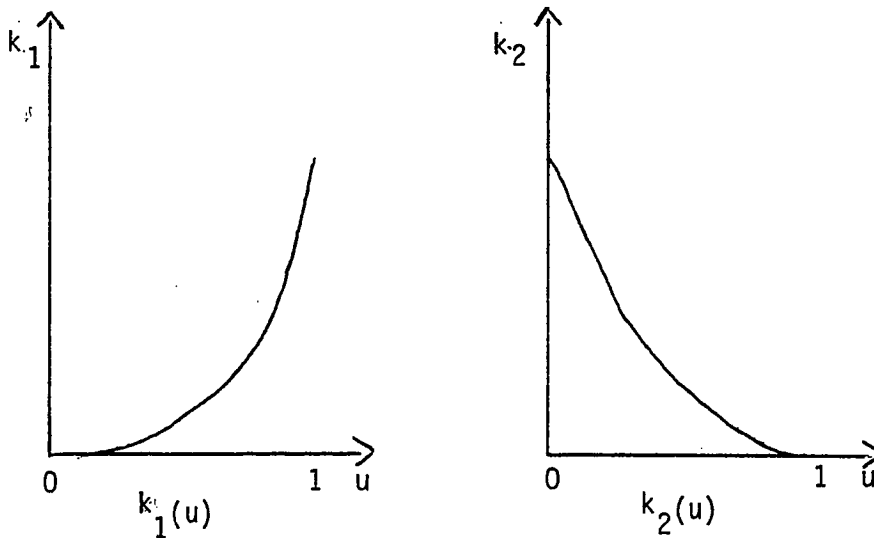


Figure 2

On a associé au problème (1.0) ÷ (5.0) plusieurs types de conditions initiales et aux bords qui seront définies dans la suite.

Aux points où $u(x,t)$ est continu, les débits d'eau et d'huile sont respectivement :

$$(6.0) \quad \begin{cases} \varphi_1(x,t) = q + qb(u) + K c(u) \frac{\partial h}{\partial x} + r(u) \\ \varphi_2(x,t) = q - qb(u) - K c(u) \frac{\partial h}{\partial x} - r(u) \end{cases}$$

Dans la suite, on a fait les hypothèses suivantes :

$$(H) \quad \begin{cases} - c(u) \frac{\partial h}{\partial x} = g \cdot c(u) \cdot \cos \gamma \\ q(x) = \text{constante, donnée} \end{cases}$$

où g est l'accélération de gravité et γ est l'angle formé par le barreau et la perpendiculaire au sol.

Dans l'équation (1.0), deux termes du premier ordre sont présents : l'un monotone $\frac{\partial}{\partial x} qb(u)$ et l'autre non monotone $\frac{\partial}{\partial x} Kc(u) \frac{\partial h}{\partial x}$, dû à la gravité.

Dans Chavent-Cohen [1], on trouve une étude de l'équation (1.0) dans le cas où l'on néglige des effets de gravité.

Dans le Chapitre I, au contraire, on n'a gardé que le terme non monotone, i.e. on a posé :

$$(H1) \quad q=0$$

(ce qui peut s'obtenir en choisissant ρ constante et en imposant une différence de pression $P(b,t) - P(a,t) = \rho(b-a)$ entre le bas et le haut du barreau).

Pour ce problème d'école, on a supposé :

$$(H2) \quad K=1 ; \Phi=1 ; g=1 ; \cos \gamma = 1 \text{ (barreau vertical)}$$

On a considéré les deux cas suivants : sans capillarité ($\alpha'(u)=0$, i.e. cas hyperbolique) et avec capillarité ($\alpha'(u) \neq 0$, i.e. cas parabolique).

Dans le cas sans diffusion capillaire, le problème s'écrit sous forme faible à l'aide d'un principe d'entropie (Kruzkov [1], Le Roux [1]) qui fixe les discontinuités et dont on doit tenir compte dans le choix des conditions aux bords. Une bonne approximation numérique du problème doit tenir compte de ce principe d'entropie d'où l'introduction du schéma aux différences finies de Godunov (Le Roux [1, 2]). Nous avons comparé ce schéma aux différences finies (approximations par des fonctions constantes par intervalles de discrétisation) avec celui obtenu avec des éléments finis discontinus de degré 1 (approximation par des fonctions linéaires par intervalle, discontinues d'un intervalle à l'autre).

Dans le cas avec diffusion, l'étude mathématique du problème est faite dans Chavent [1], [2]. Dans ce cas, on peut imposer des conditions aux bords plus variées, en particulier de conditions sur les débits d'eau à l'entrée et à la sortie du barreau. On a introduit un schéma aux éléments finis discontinus de degré 1 qui est adapté aux cas où la diffusion est faible, c'est-à-dire qui soit tel que, dans le cas limite de diffusion nulle, on retrouve les schémas construits pour le problème hyperbolique.

Dans ce premier chapitre, toutes les fonctions a , p , b , c , d sont données analytiquement et les solutions calculées sont comparées à des solutions exactes.

Dans le Chapitre II, on applique le schéma proposé à un cas physique réel, avec en particulier, la présence de deux termes de transport ($q \neq 0$). Les conditions aux bords utilisées sont réalistes : en haut, saturation en eau fixée ou injection d'eau ou d'huile ; en bas, condition unilatérale sur la saturation dérivant de la loi de continuité des pressions ou saturation en eau fixée.

CHAPITRE I

SEPARATION PAR GRAVITE DE DEUX FLUIDES IMMISCIBLES EN MILIEU POREUX

I.1 - ETUDE DU PROBLEME (1.0) ÷ (5.0) SANS CAPILLARITE

1 - INTRODUCTION

Les équations (1.0) ÷ (5.0) se réduisent dans le cas où on néglige la pression capillaire P_c et avec les hypothèses (H), (H1), (H2), à l'équation

$$(1.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial c(u)}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } Q$$

La condition initiale qu'on assigne est :

$$(2.1) \quad u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega$$

On sait qu'en général, on ne peut pas imposer à la solution de l'équation (1.1) les conditions aux bords :

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u(a,t) &= u_a(t) \\ u(b,t) &= u_b(t) \end{aligned} \quad t \in]0, T[$$

où u_a et u_b sont les saturations en eau au contact extérieur avec le barreau respectivement en haut et en bas.

En posant en chaque point $(x,t) \in Q$

$$u_x^- = u(x-0,t) \quad , \quad u_a^- = u_a$$

$$u_x^+ = u(x+0,t) \quad , \quad u_b^+ = u_b$$

$$I[u_x^-, u_x^+] = [\inf(u_x^-, u_x^+), \sup(u_x^-, u_x^+)]$$

les conditions aux bords qu'on doit se donner, sont, suivant Le Roux [1]

$$(4.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{ou bien} & \frac{c(u(a+0,t)) - c(k)}{u(a+0,t) - k} \leq 0 \quad \begin{array}{l} \forall k \in I[u_a^-, u_a^+] \\ \forall t \in]0, T[\end{array} \\ \text{ou bien} & u(a+0,t) = u_a(t) \quad \forall t \in]0, T[\end{array} \right.$$

$$\text{et} \quad (5.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{ou bien} & \frac{c(u(b-0,t)) - c(k)}{u(b-0,t) - k} \geq 0 \quad \begin{array}{l} \forall k \in I[u_b^-, u_b^+] \\ \forall t \in]0, T[\end{array} \\ \text{ou bien} & u(b-0,t) = u_b(t) \quad \forall t \in]0, T[\end{array} \right.$$

On peut écrire (4.1) et (5.1) de façon condensée par :

$$(6.1) \quad (\text{sgn}(u(a+0,t)) - k)(c(u(a+0,t)) - c(k)) \leq 0 \quad \forall k \in I[u_a^-, u_a^+] \quad \forall t \in]0, T[$$

$$(7.1) \quad (\text{sgn}(u(b-0,t)) - k)(c(u(b-0,t)) - c(k)) \geq 0 \quad \forall k \in I[u_b^-, u_b^+] \quad \forall t \in]0, T[$$

avec $\text{sgn}(\cdot)$ = fonction signe. On va résoudre numériquement le problème défini par (1.1), (2.1), (6.1), (7.1).

2 - EXPOSE DE LA METHODE D'APPROXIMATION

Découpons Ω en I intervalles $I_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i=1, \dots, I$, de longueur $\Delta x = h$, et $[0, T]$ en N intervalles $I_n = [t^n, t^{n+1}]$, $n=1, \dots, N$ de longueur Δt . On pose :

$$(1.2) \quad V_h = \{v \in L^2(\Omega); v|_{I_i} \in P^k(I_i), i=1, \dots, I\}$$

où $P^k(I_i)$ est l'espace des polynômes de degré $\leq k$ sur I_i . Alors, pour chaque t^n , on cherche $u_h^n \in V_h$, telle que

$$(2.2) \quad \int_{I_i} \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} v dx + \int_{I_i} \frac{\partial c(u_h^n)}{\partial x} v dx + (c(u_h^n(x_i)) - c(\xi_i^n))v(x_i) \\ - (c(u_h^n(x_{i+1})) - c(\xi_{i+1}^n))v(x_{i+1}) = 0$$

$$\forall v \in V_h$$

où les valeurs ξ_i^n et ξ_{i+1}^n sont déterminées de la façon suivante.

En utilisant les notations :

$$(3.2) \quad \begin{cases} u^n = u_h^n & u_i^{+n} = u^n(x_i+0) & u_i^{-n} = u^n(x_i-0) & \forall n=1, \dots, N \\ & & & \forall i=1, \dots, I+1 \\ I[u_i^{-n}, u_i^{+n}] = [\inf(u_i^{-n}, u_i^{+n}), \sup(u_i^{-n}, u_i^{+n})] & \forall n=1, \dots, N \\ & & & \forall i=1, \dots, I+1 \end{cases}$$

$\forall i=1, \dots, I+1$, ξ_i^n sera tel que

$$(4.2) \quad \text{sgn}(u_i^{+n} - u_i^{-n})c(\xi_i^n) \leq \text{sgn}(u_i^{+n} - u_i^{-n})c(k) \quad \forall k \in I[u_i^{-n}, u_i^{+n}]$$

Avec les notations (3.2), le schéma numérique sera donné par (4.2) et

$$(5.2) \quad \int_{I_i} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v dx + \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v dx + (c(u_i^n) - c(\xi_i^n))v(x_i) \\ - (c(u_{i+1}^n) - c(\xi_{i+1}^n))v(x_{i+1}) = 0$$

$$\forall v \in V_h, \forall n=1, \dots, N, \forall i=1, \dots, I$$

3 - COMPARAISON AVEC LE SCHEMA DE LESANT-RAVIART [1]

On rappelle que pour l'équation

$$(1.3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + q \frac{\partial u}{\partial x} = g \quad \text{dans } Q$$

dans Lesaint-Raviart [1], on définit, pour une discrétisation en espace, l'espace V_h comme dans (3.2), $\Gamma = \{a, b\}$ la frontière de Ω , $\Gamma_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ et enfin, si $v_i(x)$ est la normale extérieure à Γ_i , on pose :

$$\Gamma_i^- = \{x \in \Gamma_i : qv_i(x) \leq 0\}$$

$$\Gamma_i^+ = \{x \in \Gamma_i : qv_i(x) \geq 0\}$$

$$\xi_h^n = \text{trace de } u_h^n \text{ sur } \Gamma_i \text{ extérieure à } \Gamma_i$$

(On vérifie facilement que la définition ci-dessus de ξ_h^n coïncide lorsque $c(u) = q.u$, avec (4.2)).

Alors la résolution numérique de l'équation (1.3) revient à chercher, pour chaque temps t^n , une fonction $u_h^n \in V_h$, telle que :

$$(2.3) \quad \int_{\Gamma_i} \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} v dx + \int_{\Gamma_i} q \frac{\partial u_h^n}{\partial x} v dx - \int_{\Gamma_i^-} qv_i(x)(u_h^n - \xi_h^n) v dx = \int_{\Gamma_i} g v dx$$

$$\forall n=1, \dots, N, \forall i=1, \dots, N, \forall v \in V_h$$

Si q a un signe constant, on a Γ_i^- réduit à un seul point, $\forall i=1, \dots, I$, ou bien $\Gamma_i^- = \{x_i\}$ ou bien $\Gamma_i^- = \{x_{i+1}\}$.

Si q est positif, on a $\Gamma_i^- = \{x_i\}$. Alors

$q(x_i) v_i(x_i) = -q(x_i)$, et on a, avec les notations (3.2) :

$$- \int_{\Gamma_i^-} qv_i(x)(u_h^n - \xi_h^n) v dx = q(x_i)(u_i^{+n} - \xi_i^n) v(x_i)$$

Si q est négatif, on a $\Gamma_i^- = \{x_{i+1}\}$ et $q(x_{i+1}) v(x_{i+1}) = q(x_{i+1})$ et donc :

$$- \int_{\Gamma_i^-} qv_i(x)(u_h^n - \xi_h^n) v dx = -q(x_{i+1})(u_{i+1}^{-n} - \xi_{i+1}^n) v(x_{i+1})$$

La relation (2.3) donne les deux schémas :

si $q > 0$

$$\int_{I_i} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v dx + \int_{I_i} q \frac{\partial u^n}{\partial x} v dx + q(u_i^{+n} - \xi_i^n) v(x_i) = \int_{I_i} g v dx$$

$$\forall i=1,2,\dots,I, \forall n=1,\dots,N, \forall v \in V_h$$

et si $q < 0$

$$\int_{I_i} \frac{u^{n+1} - u^n}{t} v dx + \int_{I_i} q \frac{\partial u^n}{\partial x} v dx - q(u_{i+1}^{-n} - \xi_{i+1}^n) v(x_{i+1}) = \int_{I_i} g v dx$$

$$\forall i=1,\dots,I, \forall n=1,\dots,N, \forall v \in V_h$$

Ainsi le schéma (2.3) de Lesaint-Raviart est le schéma (4.2), (5.2) écrit pour une fonction c linéaire.

4 - COMPARAISON AVEC LE SCHEMA UTILISE DANS COHEN [1]

Supposons maintenant $c(u)$ monotone croissante.

Si $u_i^{-n} \leq u_i^{+n}$, (4.2) donne $c(\xi_i^n) \leq c(k)$, $\forall k \in I[u_i^{-n}, u_i^{+n}]$, et donc $\xi_i^n = u_i^{-n}$. De même si $u_i^{-n} > u_i^{+n}$, (4.2) donne $c(\xi_i^n) \geq c(k)$, $\forall k \in I[u_i^{-n}, u_i^{+n}]$ et $\xi_i^n = u_i^{+n}$. De la même façon, on voit que si $c(u)$ est monotone décroissante, on a toujours $\xi_i^n = u_i^{+n}$.

En remplaçant ces valeurs calculées pour ξ_i^n dans (5.2), on obtient, si c est monotone croissante :

$$(1.4) \quad \int_{I_i} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v dx + \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v dx + (c(u_i^{+n}) - c(u_i^{-n})) v(x_i) = 0$$

$$\forall n=1,\dots,N, \forall i=1,\dots,I, \forall v \in V_h$$

et si c est monotone décroissante :

$$(2.4) \quad \int_{I_i} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v dx + \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v dx - (c(u_{i+1}^{-n}) - c(u_{i+1}^{+n})) v(x_{i+1}) = 0$$

$$\forall n=1,\dots,N, \forall i=1,\dots,I, \forall v \in V_h$$

On constate que le schéma (1.4) coïncide avec le schéma utilisé dans Cohen [1] qui n'est donc que le schéma (4.2), (5.2) écrit pour une fonction c monotone croissante.

5 - ETUDE DU SCHEMA (4.2), (5.2) POUR $k=0$

Pour $k=0$, on obtient facilement le schéma de Godounov aux différences finies. En effet, pour $k=0$, on a, sur chaque I_i , $v = v_i = \chi_{I_i}(x)$, où χ_{I_i} est la fonction indicatrice de I_i . D'autre part, on pose :

$$u_h^n = u^n = \sum_{i=1}^I u_i^n(x) v_i(x) \quad n=1, \dots, N+1$$

On écrit (5.2) pour les fonctions de bases v_i de V_h et on obtient :

$$(1.5) \quad \int_{I_i} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v_i(x) dx + \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v_i(x) dx + (c(u_i^n) - c(\xi_i^n)) v_i(x) - (c(u_{i+1}^{-n}) - c(\xi_{i+1}^n)) v_i(x_{i+1}) = 0 \quad \forall i=1, \dots, I$$

Comme $u^n = u_i^n$ dans I_i ,

$$\int_{I_i} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v_i(x) dx = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} \Delta x \quad \forall i=1, \dots, I$$

$$\int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v_i(x) dx = 0 \quad \forall i=1, \dots, I$$

$$c(u_i^{+n}) = c(u_{i+1}^{-n}) \quad \forall i=1, \dots, I$$

et donc on a :

$$(2.5) \quad (u_i^{n+1} - u_i^n) \frac{\Delta x}{\Delta t} - (c(\xi_i^n) - c(\xi_{i+1}^n)) = 0 \quad \forall i=2, \dots, I, \quad \forall n=1, \dots, N$$

En posant :

$$(3.5) \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{W}$$

on obtient le schéma suivant :

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} u_i^{n+1} = u_i^n - W(c(\xi_{i+1}^n) - c(\xi_i^n)) & n=1, \dots, N \quad i=2, \dots, I \\ \xi_i^n \text{ réalisant (4.2)} & \\ u_1^{n+1} = u_a(n\Delta t) & n=1, \dots, N \\ u_{I+1}^{n+1} = u_b(n\Delta t) & \\ u_i^1 = u_0(x_i) & i=1, \dots, I+1 \end{array} \right.$$

qui coïncide avec celui étudié dans Le Roux [1], [2].

6 - ETUDE DU SCHEMA (4.2), (5.2) POUR k=1

Voyons maintenant quel est le schéma qu'on obtient si dans la définition (3.2) on pose $k=1$. On a :

$$V_h = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{I_i} \in P^1(I_i), i=1, \dots, I\}$$

On note : v_i^+ et v_{i+1}^- , $i=1, \dots, I$ les fonctions de base de l'espace V_h , linéaires, de support I_i , définies par :

$$v_i^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=x_i \\ 0 & \text{si } x=x_{i+1} \end{cases} \quad v_{i+1}^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=x_i \\ 1 & \text{si } x=x_{i+1} \end{cases}$$

Exprimons u^n en fonction des fonctions de base :

$$u^n = \sum_{i=1}^I (u_i^{+n} v_i^+(x) + u_{i+1}^{-n} v_{i+1}^-(x)) \quad \forall n=2, \dots, N+1$$

On obtient, de (5.2), avec $v=v_i^+$

$$(1.6) \quad \int_{I_i} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v_i^+ dx + \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v_i^+(x) dx + (c(u_i^{+n}) - c(\xi_i^n)) v_i^+(x_i) = 0$$

Explicitons l'équation (1.6). On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{I_i} (u^{n+1} - u^n) v_i^+ dx &= \frac{1}{\Delta t} \int_{I_i} (u^{n+1} - u_i^{+n}) (v_i^+)^2 dx + \\ &\quad \frac{1}{\Delta t} \int_{I_i} (u_{i+1}^{-n+1} - u_{i+1}^{-n}) v_i^+ v_{i+1}^- dx \end{aligned}$$

Dans la suite, on utilisera toujours, pour approcher les intégrales, la formule de Simpson :

$$(2.6) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

Donc :

$$(3.6) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{I_i} (u^{n+1} - u^n) v_i^+ dx \approx \frac{\Delta x}{6\Delta t} (u_{i+1}^{-n+1} - u_{i+1}^{-n}) + \frac{\Delta x}{3\Delta t} (u_i^{+n+1} - u_i^{+n})$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v_i^+ dx &= c(u_{i+1}^{-n}) v_i^+(x_{i+1}) - c(u_i^{+n}) v_i^+(x_i) - \int_{I_i} c(u^n) \frac{dv_i^+}{dx} dx = \\ &= -c(u_i^{+n}) + \frac{1}{\Delta x} \int_{I_i} c(u^n) dx \end{aligned}$$

En utilisant (2.6), on obtient :

$$(4.6) \quad \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v_i^+ dx \approx -c(u_i^{+n}) + \frac{1}{6} (c(u_i^{+n}) + 4c(\frac{u_i^{+n} + u_{i+1}^{-n}}{2}) + c(u_{i+1}^{-n}))$$

L'équation (1.6) sera donc approchée par :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{3\Delta t} (u_i^{+n+1} - u_i^{+n}) + \frac{\Delta x}{6\Delta t} (u_{i+1}^{-n+1} - u_{i+1}^{-n}) + \frac{1}{6} (c(u_i^{+n}) + 4c(\frac{u_i^{+n} + u_{i+1}^{-n}}{2}) + c(u_{i+1}^{-n})) \\ - c(\xi_i^n) = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (3.5) et en posant :

$$c(u_i^{+n}) = c_i^{+n} \quad i=1, \dots, I+1$$

$$c(u_{i+1}^{-n}) = c_{i+1}^{-n} \quad i=1, \dots, I$$

$$c\left(\frac{u_i^{+n} + u_{i+1}^{-n}}{2}\right) = c_{i+\frac{1}{2}}^n \quad i=1, \dots, I$$

$$(5.6) \quad \frac{1}{3} (u_i^{+n+1} - u_i^{+n}) + \frac{1}{6} (u_{i+1}^{-n+1} - u_{i+1}^{-n}) = -\frac{W}{6} [c_i^{+n} + 4c_{i+\frac{1}{2}}^n + c_{i+1}^{-n} - 6c(\xi_i^n)]$$

En posant $v = v_{i+1}^-$ dans (5.2), on obtient, de la même façon :

$$(6.6) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{I_i} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v_{i+1}^- dx + \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v_{i+1}^- dx - (c(u_{i+1}^{-n}) - c(\xi_{i+1}^n)) v_{i+1}^-(x_{i+1}) = 0$$

$$(7.6) \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{I_i} (u^{n+1} - u^n) v_{i+1}^-(x) dx \approx \frac{\Delta x}{6\Delta t} (u_i^{+n+1} - u_i^{+n}) + \frac{\Delta x}{3\Delta t} (u_{i+1}^{-n+1} - u_{i+1}^{-n})$$

$$(8.6) \quad \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v_{i+1}^-(x) dx \approx c_{i+1}^{-n} - \frac{1}{6} [c_i^{+n} + 4c_{i+\frac{1}{2}}^n + c_{i+1}^{-n}]$$

dont on déduit :

$$\frac{\Delta x}{6\Delta t} (u_i^{+n+1} - u_i^{+n}) + \frac{\Delta x}{3\Delta t} (u_{i+1}^{-n+1} - u_{i+1}^{-n}) - \frac{1}{6} [c_i^{+n} + 4c_{i+\frac{1}{2}}^n + c_{i+1}^{-n} - 6c(\xi_{i+1}^n)] = 0$$

et avec (3.5) :

$$(9.6) \quad \frac{1}{6} (u_i^{+n+1} - u_i^{+n}) + \frac{1}{3} (u_{i+1}^{-n+1} - u_{i+1}^{-n}) = \frac{W}{6} [c_i^{+n} + 4c_{i+\frac{1}{2}}^n + c_{i+1}^{-n} - 6c(\xi_{i+1}^n)]$$

De (5.6) et (9.6) on tire enfin, pour tout i , $1 \leq i \leq I$:

$$(10.6) \quad u_{i+1}^{-n+1} = u_{i+1}^{-n} - W \left[-c_i^{+n} - 4c_{i+\frac{1}{2}}^n - c_{i+1}^{-n} + 2c(\xi_i^n) + 4c(\xi_{i+1}^n) \right]$$

$$(11.6) \quad u_i^{+n+1} = u_i^{+n} - W \left[c_i^{+n} + 4c_{i+\frac{1}{2}}^n + c_{i+1}^{-n} - 4c(\xi_i^n) - 2c(\xi_{i+1}^n) \right]$$

Donc, dans le cas $k=1$, on utilise le schéma défini par (4.2), (10.6), (11.6) et par les relations suivantes :

$$(12.6) \quad u_1^{-n+1} = u_a(n\Delta t) \quad n=1, \dots, N$$

$$(13.6) \quad u_{I+1}^{+n+1} = u_b(n\Delta t) \quad n=1, \dots, N$$

$$(14.6) \quad u_i^{-1} = u_i^{+1} = u_0(x_i) \quad i=2, \dots, I$$

7 - DETERMINATION NUMERIQUE DE ξ_i^n , $i=1, \dots, I+1$

Pour la détermination numérique des valeurs ξ_i^n , $i=1, \dots, I+1$, on a effectué une discrétisation des intervalles $I[u_i^{-n}, u_i^{+n}]$, $i=1, \dots, I+1$, en ℓ sous-intervalles d'égale longueur, ℓ étant fixé, et on a cherché le minimum de la fonction :

$$\text{sgn}(u_i^{+n} - u_i^{-n})c(.)$$

entre les points $\ell_j = u_i^{+n} - j(u_i^{+n} - u_i^{-n})/\ell$, $j=0, \dots, \ell$

8 - RESULTATS NUMERIQUES (CAS SANS CAPILLARITE)

8.1 - Les données

Les données des essais numériques ont été :

$$(1.8) \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ T \geq 1 \\ c(u) = u(1-u) \end{cases}$$

On a utilisé deux jeux de conditions aux limites :

$$(2.8) \quad \begin{cases} u_a(t) = 0 \\ u_b(t) = 1 \end{cases} \quad t \in]0, T[$$

ou bien

$$(3.8) \quad \begin{cases} u_a(t) = 1 \\ u_b(t) = 0 \end{cases} \quad t \in]0, T[$$

et plusieurs conditions initiales qu'on exposera dans la suite. Dans tous les cas, on connaissait la solution exacte du problème continu.

On a comparé les résultats obtenus sur les mêmes exemples, en utilisant le schéma obtenu par $k=0$ et celui avec $k=1$.

8.2 - Cas $k=0$

Avec les différences finies, on a constatés, pour les exemples numériques traités que la solution calculée ne sort jamais de l'intervalle $[0,1]$, qui contient la solution exacte, et qu'on obtient les meilleurs résultats pour des pas de temps proches de $\frac{1}{\lambda}$, borne supérieure de la condition de stabilité $\frac{\Delta t}{\Delta x} = W \leq \frac{1}{\lambda}$, λ étant la constante de Lipshitz de $c(u)$.

Exemple 1 : Les données sont (1.8), (3.8) et

$$u_0(x) = \text{constante} = 0.75$$

La solution exacte au cours du temps est représentée sur la figure 3.

On compare sur les figures 4 et 5 les solutions calculées respectivement avec $W=1$ et $W=2$, au temps 0.6 [On a pu utiliser $W=2$, car $0.5 \leq u(x,t) \leq 1$ et donc $|c'(u)| = |1-2u| \leq 0.5$]. On voit que $W=1$ donne un front plus arrondi que $W=2$, et une valeur à l'intérieur sur le bord $x=b$ moins proche de la solution exacte. Ceci est très commode dans la pratique, parce qu'on peut employer des grands pas de temps.

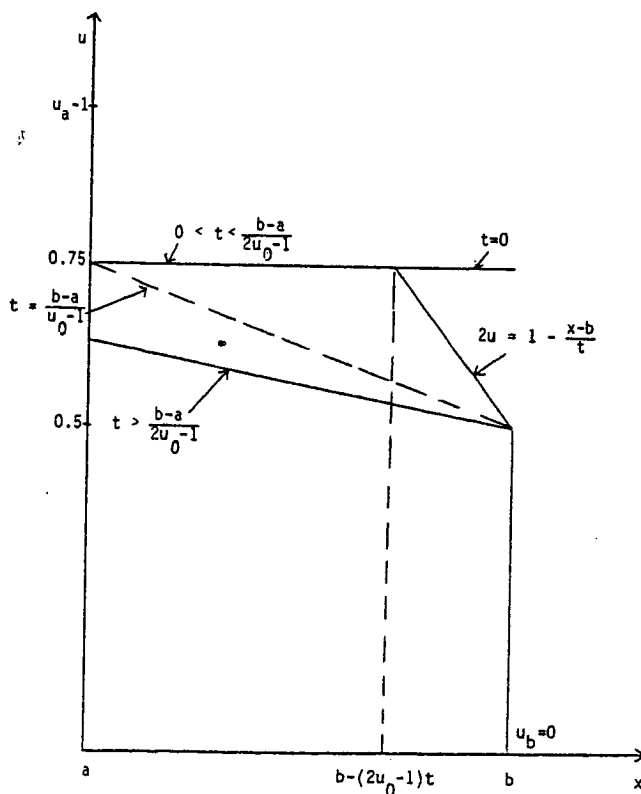


Figure 3. Exemple 1.
Solution exacte

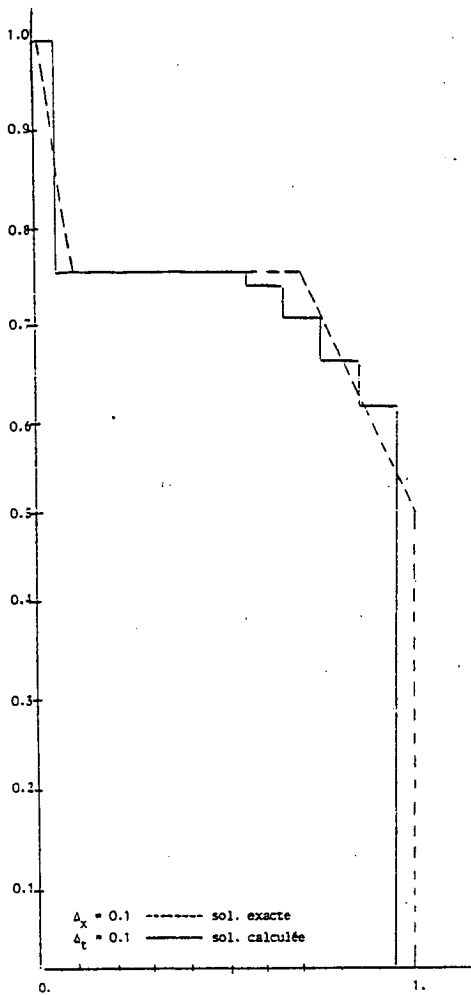


Figure 4. Exemple 1.
t=0.6. $\Delta t=0.1$. cas k=0

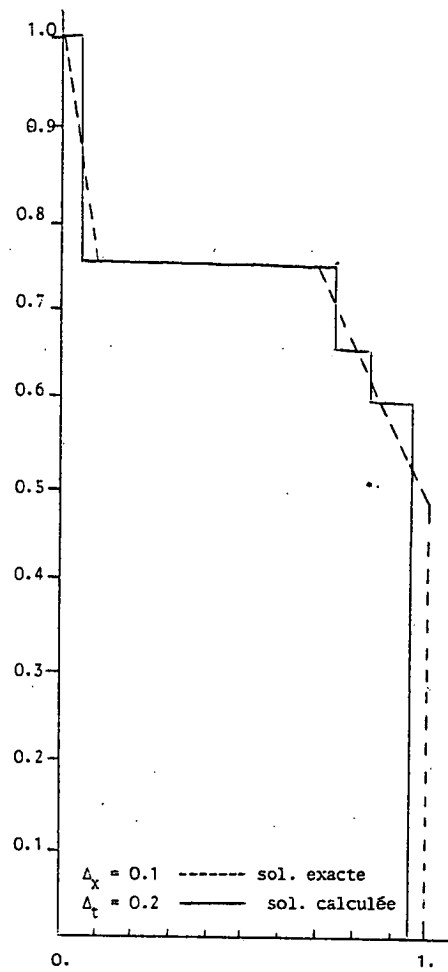


Figure 5. Exemple 1.
t=0.6. $\Delta t=0.2$. Cas k=0

Exemple 2 : Les données sont (1.8), (3.8) et

$$u(x,0) = 1 - \frac{x-a}{b-a}$$

La solution exacte au cours du temps est dessinée sur la figure 6.

La solution présente des discontinuités aux bords, mais est régulière dans l'intervalle (a,b). On voit sur la figure 7 que la solution calculée avec $W=1$ se place autour de la solution exacte et cette allure se maintient au cours du temps. (figure 8).

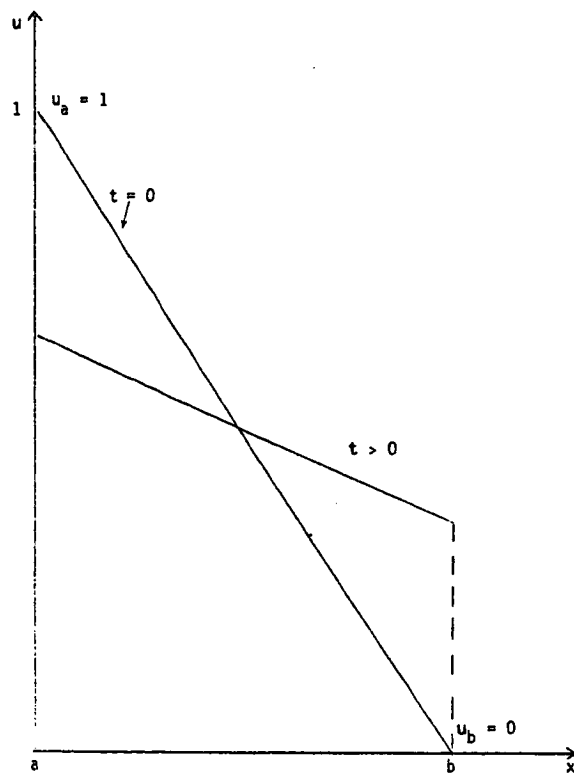


Figure 6. Exemple 2.
Solution Exacte

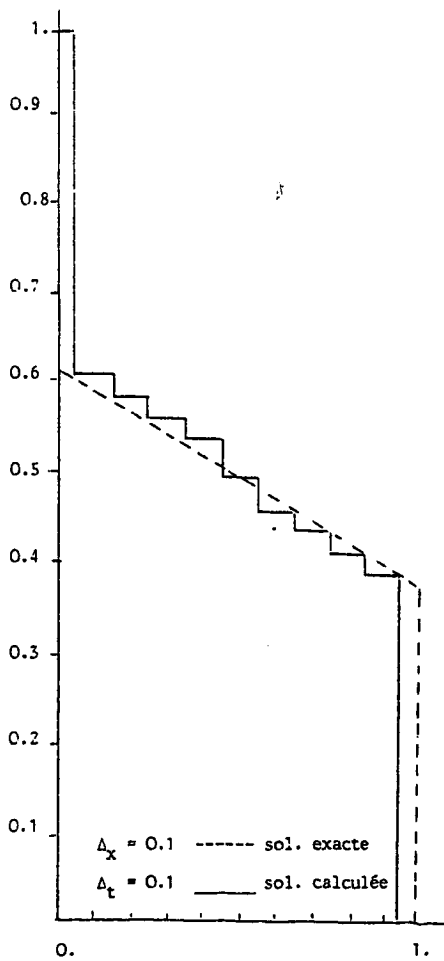


Figure 7. Exemple 2.
 $t=1.5$. $\Delta t=0.1$. cas $k=0$

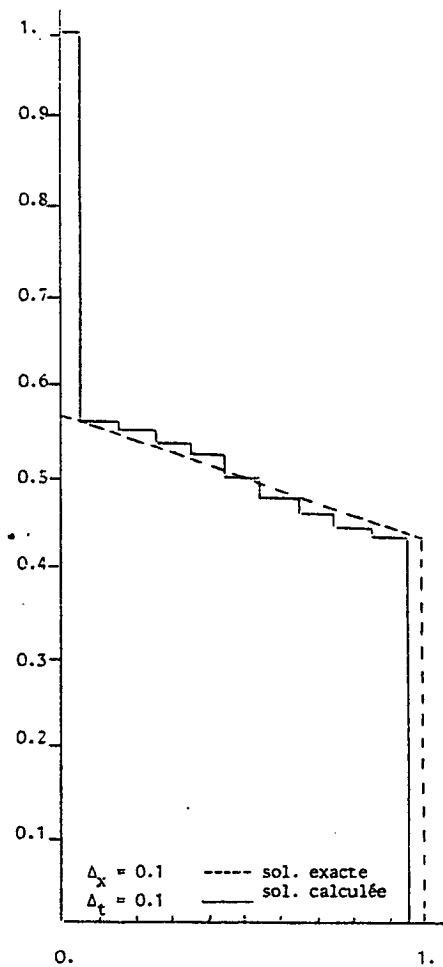


Figure 8. Exemple 2.
 $t=3$. $\Delta t=0.1$. cas $k=0$

8.3 - Cas $k=1$ - Éléments finis du premier ordre

Pour le schéma qui utilise les éléments finis du 1er ordre, il n'y a aucun critère théorique de stabilité ; on l'a déterminé numériquement sur les exemples étudiés. On constatera que les fronts sont mieux rendus qu'avec les différences finies, et que les éventuelles parties linéaires des solutions sont calculées avec une très grande précision.

Exemple 3 : Les données sont (1.8), (2.8) et

$$u_0(x) = u_0 = \text{constante}$$

La solution exacte est montrée sur la figure 9, tandis que la solution calculée pour $u_0 = 0.25$ au temps $t = 1.7$ est montrée sur la figure 10.

La discontinuité réelle est au point $x = 0.75$: ce point n'appartient pas à la discrétisation de $[a,b]$ et la solution calculée vérifie $u^+(0.7) \ll 0$ et $u^-(0.8) \gg 1$. Les valeurs significatives pour la détermination du front de discontinuité sont, en effet, les traces de la fonction u à l'extérieur de $[0.7, 0.8]$, qui selon la définition (4.2) sont $\xi(0.7) = 0$ et $\xi(0.8)$. Donc le front est assez bien rendu et on peut interpréter $u^+(0.7)$ et $\bar{u}(0.8)$ comme des valeurs qui donnent la pente du front.

Sur la figure 11, on voit que le front est parfaitement rendu avec les mêmes données aux bords, mais avec $u_0 = 0.5$, car le point $x = 0.5$ où se place la discontinuité appartient à la discrétisation de $[a,b]$.

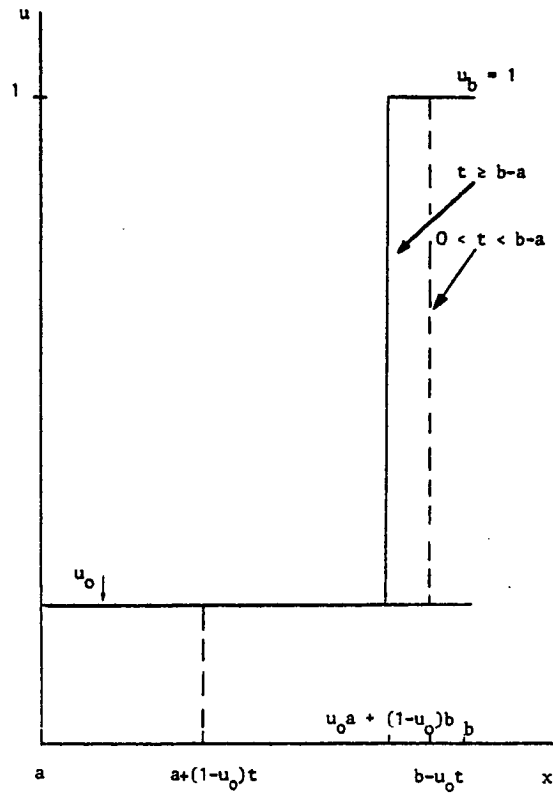


Figure 9 : Exemple 3
Solution exacte

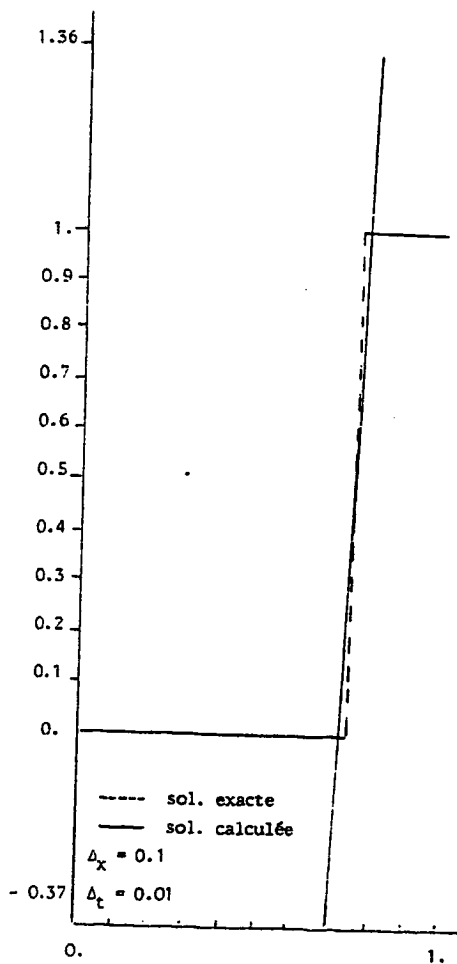


Figure 10. Exemple 3.
 $t=1.7$. $\Delta t=0.01$. cas $k=1$

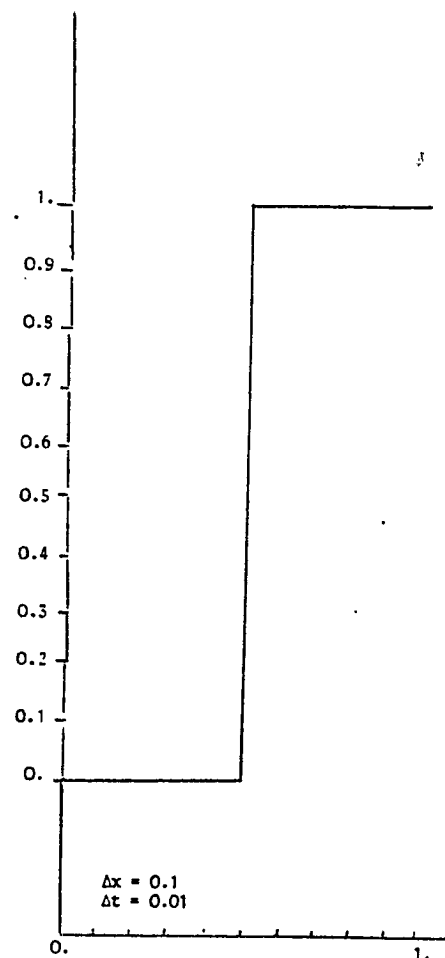


Figure 11. Exemple 3.
 $t=1.7$. $\Delta t=0.01$. cas $k=1$

Exemple 4 :

Sur les figures 13 et 14 on a dessiné les solutions calculées, avec le même nombre de degrés de liberté, au temps $t=0.7$, respectivement par différences finies et éléments finis, pour l'exemple défini par (1.8), (2.8) et

$$u_0(x) = 1 - \frac{x-a}{b-a}$$

tandis que la solution exacte est dessinée sur la figure 12, où $x(t)$ est défini par

$$x(t) = t + b - \sqrt{(b-a)^2 + 2t(b-a)}$$

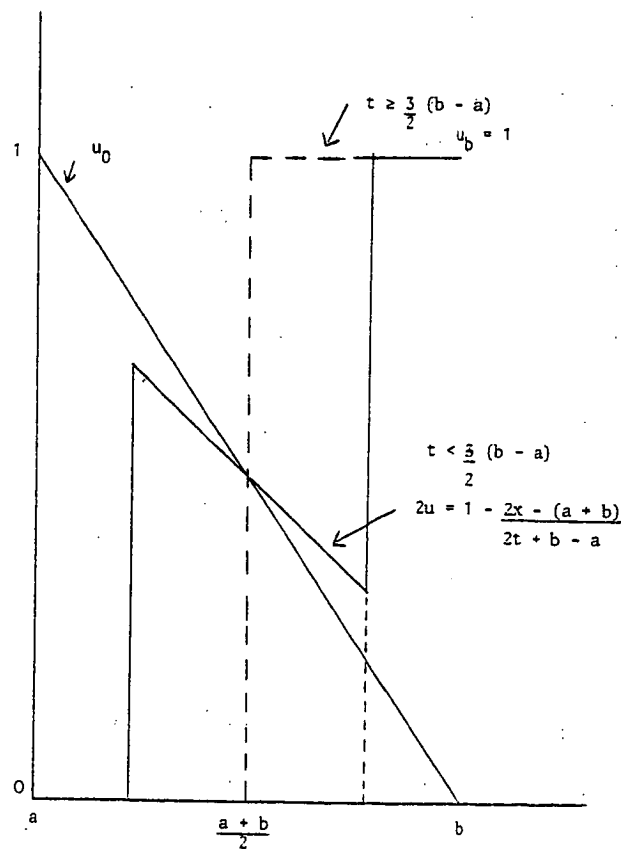


Figure 12.. Exemple 4.
Solution exacte

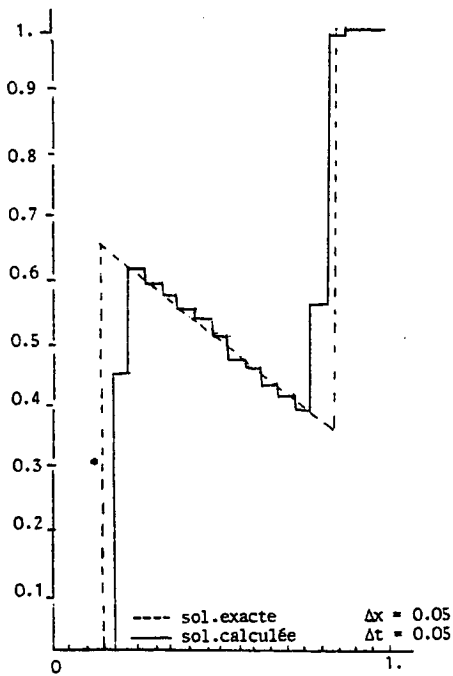


Figure 13. Exemple 4. $t=0.7$. $\Delta t=0.05$. $cask=0$

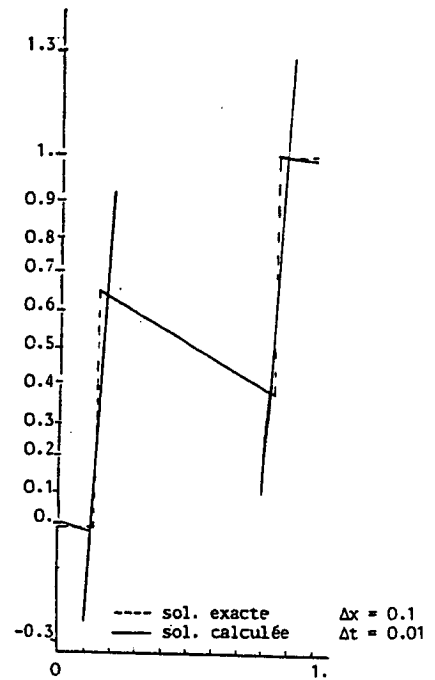


Figure 14. Exemple 4.
 $t=0.7$. $\Delta t=0.01$. cas $k=1$

Exemple 5 : Pour l'exemple défini par (1.8), (3.8) et

$$u_0(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

la solution exacte se trouve dans la figure 15 et on voit que les valeurs aux bords calculées par les éléments finis (figure 17) approchent mieux les valeurs exactes que celles calculées avec les différences finies (figure 16), à nombre égal de degrés de liberté

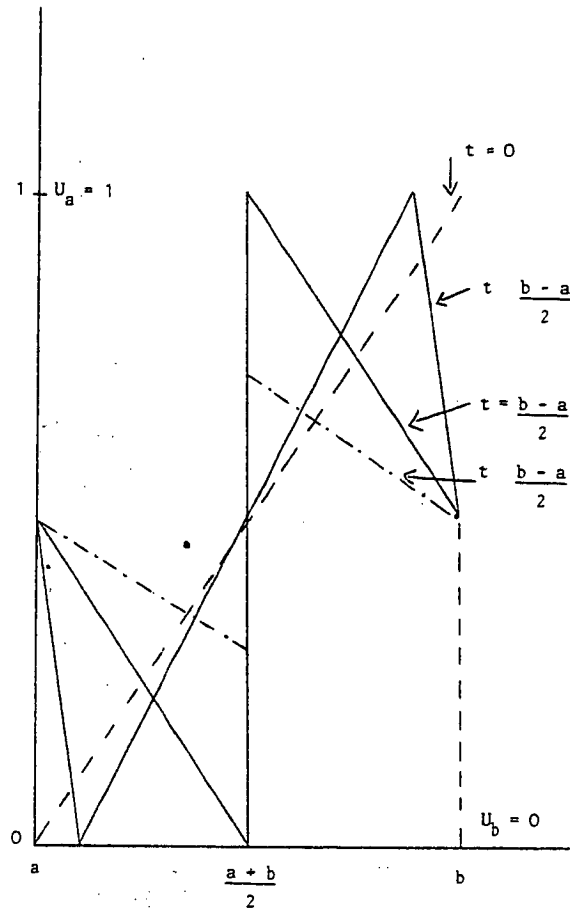


Figure 15. Exemple 5.
Solution exacte

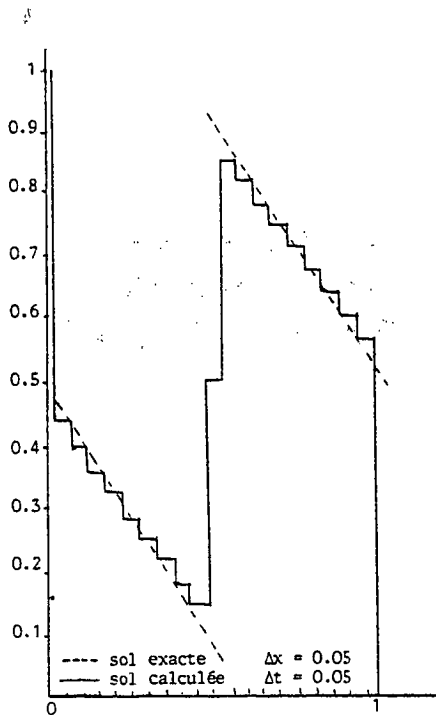


Figure 16. Exemple 5.
 $t=0.6$. $\Delta t=0.05$. cas $k=0$

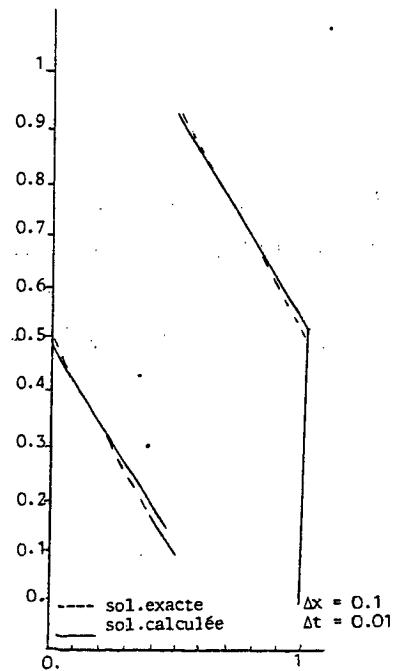


Figure 17. Exemple 5.
 $t=0.6$. $\Delta t=0.01$. cas $k=1$

8.4 - Temps de calcul

Le temps de calcul (IBM 370-168) pour un exemple test est de 2 sec. 24 pour le schéma aux éléments finis du 1er ordre, tandis que pour les différences finies il est de 1 sec. 57, à nombre égal de degré de liberté. Le pas de temps nécessaire pour garder la stabilité de la méthode aux éléments finis est cinq fois plus petit que celui nécessaire pour les différences finies.

1.2 - ETUDE DU PROBLEME (1.0) ÷ (5.0) AVEC CAPILLARITE

9 - INTRODUCTION DE LA CAPILLARITE

On garde les hypothèses (H), (H1), (H2) de l'Introduction, mais on suppose $P_c \neq 0$. On considère donc maintenant l'équation :

$$(1.9) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial c(u)}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } Q$$

avec

$$(2.9) \quad r = - \frac{\partial}{\partial x} \alpha(u) \quad \text{dans } Q$$

où $\alpha(u)$ est la primitive, nulle pour $u=0$, de la fonction α' définie en (5.0).

On suppose encore le barreau en contact en haut avec un fluide à la saturation u_a et en bas avec un fluide à la saturation u_b .

Ce qui change par rapport au problème précédent est d'une part le schéma à l'intérieur de l'intervalle, par l'introduction du terme de diffusion, d'autre part les conditions aux bords, qui seront définies d'une façon plus satisfaisante du point de vue physique.

Commençons par le premier point :

Soit V_h défini comme dans (1.2) et soit :

$$(3.9) \quad Q_h = \{s \in C^0(\bar{\Omega}) : s|_{I_i} \in P^{k+1}, \quad \forall i=1, \dots, I\}$$

$\forall n=1, \dots, N$, on cherche un couple $(u^n, r^n) \in V_h \times Q_h$, tel que :

$$(4.9) \quad \int_{I_i} \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} v dx + \int_{I_i} \frac{\partial r^n}{\partial x} v dx + \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v dx + \\ + (c(u_i^{+n}) - c(\xi_i^n))v(x_i) - (c(u_{i+1}^{-n}) - c(\xi_{i+1}^n))v(x_{i+1}) = 0 \\ \forall i=1, \dots, I, \forall v \in V_h$$

$$(5.9) \quad \int_{\Omega} r^n s dx = \int_{\Omega} \alpha(u) \frac{ds}{dx} - \alpha(u(b, t^n))s(b) + \alpha(u(a, t^n))s(a) \quad \forall s \in Q_h$$

où ξ_i^n , $i=1, \dots, I+1$, $n=1, \dots, N$ sont définis par (4.2).

10 - ETUDE DE SCHEMA (4.9), (5.9), (4.2) POUR $k=1$

On a étudié le schéma (4.9), (5.9), (4.2) seulement pour $k=1$.

Les fonctions de base de Q_h sont de deux sortes : $\forall i=2, \dots, I$, on note s_{2i-1} celle qui vaut 1 en x_i et de support $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ et s_{2i} celle qui vaut 1 au milieu de I_i et de support I_i ; elles ont l'allure suivante :

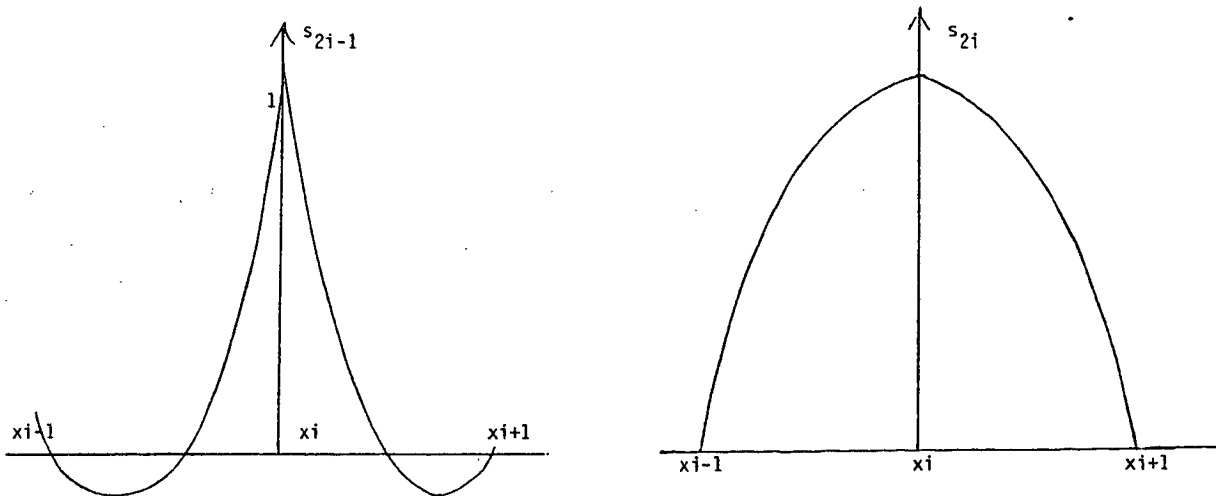


Figure 18 : Fonctions de base de Q_h

On cherche r^n dans Q_h qui s'écrit donc :

$\forall n,$

$$r^n(x) = r_{2i-1}^n s_{2i-1}(x) + r_{2i}^n s_{2i}(x) + r_{2i+1}^n s_{2i+1}(x) \quad \forall x \in I_i, i=1, \dots, I$$

où r_{2i-1}^n , r_{2i}^n et r_{2i+1}^n sont respectivement les valeurs, inconnues, de r^n aux points x_i , $(x_i + x_{i+1})/2$ et x_{i+1} .

1ère équation :

On a, en posant $v = v_i^+$ dans (4.9) et en utilisant (2.6) :

$$(1.10) \quad \int_{I_i} \frac{\partial r^n}{\partial x} v_i^+ dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} (r_{2i-1}^n s'_{2i-1} + r_{2i}^n s'_{2i} + r_{2i+1}^n s'_{2i+1}) v_i^+ dx \approx \\ \approx \frac{1}{6} [-5r_{2i-1}^n + 4r_{2i}^n + r_{2i+1}^n]$$

En utilisant (3.6), (4.6) et (1.10) on obtient

l'expression :

$$(2.10) \quad \frac{1}{3W} (u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{6W} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) + \frac{1}{6} (-5r_{2i-1}^n + 4r_{2i}^n + r_{2i+1}^n) + \\ + \frac{1}{6} (c_i^{n+1} + 4c_{i+\frac{1}{2}}^n + c_{i+1}^{n+1} - 6c(\xi_i^n)) = 0$$

De la même façon, en posant $v = v_{i+1}^-$ dans (4.9), on obtient par (2.6) la formule approchée :

$$(3.10) \quad \int_{I_i} \frac{\partial r^n}{\partial x} v_{i+1}^- dx \approx \frac{1}{6} [-r_{2i-1}^n - 4r_{2i}^n + 5r_{2i+1}^n]$$

En utilisant (7.6), (8.6) et (3.10), on obtient

l'expression :

$$(4.10) \quad \frac{1}{6W} (u_i^{n+1} - u_i^n) + \frac{1}{3W} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1}^n) + \frac{1}{6} (-r_{2i-1}^n - 4r_{2i}^n + 5r_{2i+1}^n) + \\ + \frac{1}{6} (-c_i^{n+1} - 4c_{i+\frac{1}{2}}^n - c_{i+1}^{n+1} + 6c(\xi_{i+1}^n)) = 0$$

En combinant linéairement (2.10) et (4.10), on obtient, pour tout i , $i=1, \dots, I$:

$$(5.10) \quad u_i^{n+1} - u_i^n = -W[(-3r_{2i-1}^n + 4r_{2i}^n - r_{2i+1}^n) + (c_i^{n+1} + 4c_{i+\frac{1}{2}}^n + c_{i+1}^{n+1} - 4c(\xi_i^n) - 2c(\xi_{i+1}^n))]]$$

$$(6.10) \quad u_{i+1}^{-n+1} - u_{i+1}^{-n} = -W[(r_{2i-1}^n - 4r_{2i}^n + 3r_{2i+1}^n) + (-c_i^{+n} - 2c_{i+\frac{1}{2}}^n - c_{i+1}^n + 4c(\xi_{i+1}^n) + 2c(\xi_i^n))]$$

2ème équation :

On pose , dans (5.9), $s=s_{2i-1}$ puis $s=s_{2i}$. Utilisant la formule de Simpson (2.6) on obtient, pour le premier membre :

$$\int_{\Omega} r^n s_{2i-1} dx \approx \frac{\Delta x}{3} r_{2i-1}^n \quad i=2, \dots, I$$

$$\int_{\Omega} r^n s_{2i} dx \approx \frac{2\Delta x}{3} r_{2i}^n \quad i=1, \dots, I$$

$$\int_{\Omega} r^n s_1 dx \approx \frac{\Delta x}{6} r_1^n$$

$$\int_{\Omega} r^n s_{2I+1} dx \approx \frac{\Delta x}{6} r_{2I+1}^n$$

et pour le deuxième membre :

$$\int_{\Omega} \alpha(u^n) \frac{ds_{2i-1}}{dx} dx \approx \frac{1}{6} [-\alpha_{i-1}^{+n} + 4\alpha_{i-\frac{1}{2}}^n + 3\alpha_i^{-n} - 3\alpha_i^{+n} - 4\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n + \alpha_{i+1}^{-n}] \quad i=2, \dots, I$$

$$\int_{\Omega} \alpha(u^n) \frac{ds_{2i}}{dx} dx = \frac{2}{3} (\alpha_i^{+n} - \alpha_{i+1}^{-n}) \quad i=1, \dots, I$$

$$\int_{\Omega} \alpha(u^n) \frac{ds_1}{dx} dx = \frac{1}{6} (-3\alpha_1^{+n} - 4\alpha_{\frac{3}{2}}^n + \alpha_2^{-n})$$

$$\int_{\Omega} \alpha(u^n) \frac{ds_{2I+1}}{dx} dx = \frac{1}{6} (-\alpha_I^{+n} + 4\alpha_{I+\frac{1}{2}}^n + 3\alpha_{I+1}^{-n})$$

On obtient donc, pour chaque $n=1, \dots, N$:

$$(7.10) \quad r_1^n = \frac{1}{\Delta x} [6\alpha(u(a, t^n)) - 3\alpha_1^{+n} - 4\alpha_{\frac{3}{2}}^n + \alpha_2^{-n}]$$

$$(8.10) \quad r_{2i-1}^n = \frac{1}{2\Delta x} [-\alpha_{i-1}^{+n} + 4\alpha_{i-\frac{1}{2}}^n + 3\alpha_i^{-n} - 3\alpha_i^{+n} - 4\alpha_{i+\frac{1}{2}}^n + \alpha_{i+1}^{-n}] \quad i=2, \dots, I$$

$$(9.10) \quad r_{2i}^n = \frac{1}{\Delta x} [\alpha_i^{+n} - \alpha_{i+1}^{-n}]$$

$$(10.10) \quad r_{2I+1}^n = \frac{1}{\Delta x} [-\alpha_I^{+n} + 4\alpha_{I+\frac{1}{2}}^n + 3\alpha_{I+1}^{-n} - 6\alpha(u(b, t^n))]$$

Le schéma est donc donné par les relations (5.10) ÷ (10.10).

11 - CONDITIONS AUX LIMITES DE L'EQUATION AVEC CAPILLARITE

On a considéré trois types de conditions aux limites :

ou bien des conditions de Dirichlet :

$$(1.11) \quad \begin{cases} u(a) = u_a(t) \\ u(b) = u_b(t) \end{cases}$$

ou bien :

$$(2.11) \quad u(a) = u_a(t)$$

$$(3.11) \quad \begin{cases} u(b) \leq 1 \\ \varphi_1(u(b)) \geq 0 \\ (1-u(b)) \varphi_1(u(b)) = 0 \end{cases}$$

ou bien encore :

$$(4.11) \quad \begin{cases} u(a) \leq 1 \\ \varphi_1(u(a)) \geq 0 \\ (1-u(a)) \varphi_1(u(a)) = 0 \end{cases} \quad \text{avec (3.11)}$$

où les débits d'eau φ_1 aux points a et b sont définis respectivement, en tenant compte de (H1) et (H2), par :

$$\varphi_1(a) = r(a) + c(u(a))$$

$$\varphi_1(b) = r(b) + c(u(b))$$

12 - DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES (3.11), (4.11)

Considérons la condition (4.11). Au point a , qui est un point de discontinuité, on définit :

$$\varphi_1^n(a) = r_1^n + c(\xi_1^n)$$

où r_1^n est donné par (7.10) et ξ_1^n est dans $I[u^n(a), u_1^{+n}]$ et vérifie

$$(1.12) \quad \operatorname{sgn}(u_1^{+n} - u^n(a))c(\xi_1^n) \leq \operatorname{sgn}(u_1^{+n} - u^n(a))c(k) \quad \forall k \in I[u^n(a), u_1^{+n}]$$

A chaque instant t^n , pour u_1^{+n} fixé, $c(\xi_1^n)$ est une fonction qui dépend de $u^n(a)$, qu'on notera avec $\sigma(u_1^{+n}, u^n(a))$. On représente, sur la figure 19, l'allure de cette fonction pour deux différentes valeurs de u_1^{+n} , en ayant fixé $c(u) = u(1-u)$.

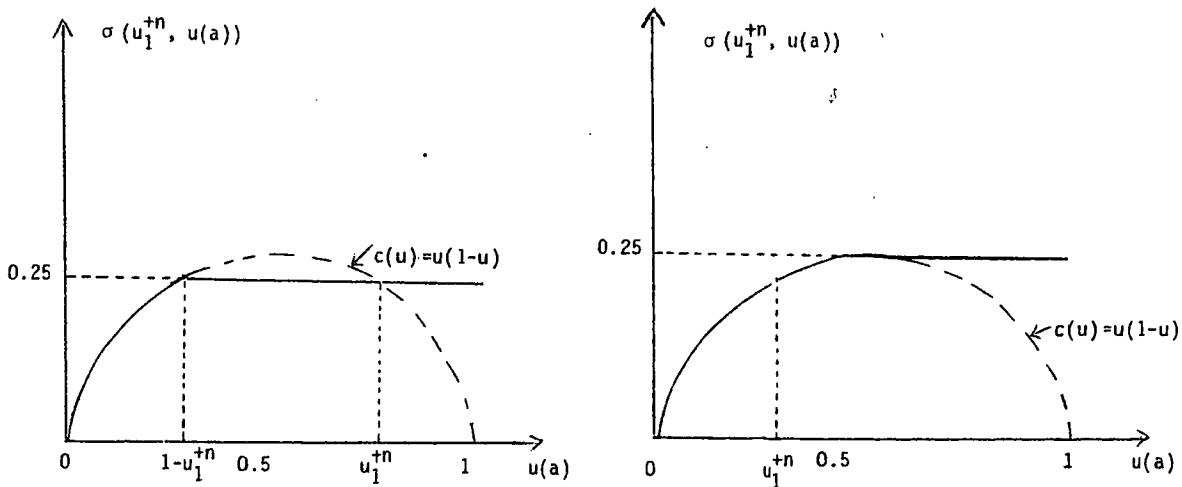


Figure 19 : Exemples de fonctions $u(a) \rightarrow \sigma(u_1^{+n}, u(a))$

Etudions quelques propriétés de la fonction $u(a) \rightarrow \sigma(u_1^{+n}, u(a))$

$$\sigma(u_1^{+n}, u_1^{+n}) = c(u_1^{+n})$$

$$\sigma(u_1^{+n}, u(a)) \leq \sigma(u_1^{+n}, u_1^{+n}) \quad \forall u(a) \leq u_1^{+n}$$

$$\sigma(u_1^{+n}, u(a)) \geq \sigma(u_1^{+n}, u_1^{+n}) \quad \forall u(a) \geq u_1^{+n}$$

Soit maintenant $u(a_1) \leq u(a_2)$.

Si $u(a_1) \leq u(a_2) \leq u_1^{+n}$, (1.12) donne :

$$(2.12) \quad \sigma(u_1^{+n}, u(a_1)) \leq c(k) \quad \forall k \in I[u_1^{+n}, u(a_1)]$$

$$\sigma(u_1^{+n}, u(a_2)) \leq c(k) \quad \forall k \in I[u_1^{+n}, u(a_2)]$$

Comme $I[u_1^{+n}, u(a_1)] \supseteq I[u_1^{+n}, u(a_2)]$, on a

$$(3.12) \quad \sigma(u_1^{+n}, u(a_1)) \leq \sigma(u_1^{+n}, u(a_2))$$

Si $u(a_1) \leq u_1^{+n} \leq u(a_2)$, on a, par (1.12), (2.12) et

$$(4.12) \quad \sigma(u_1^{+n}, u(a_2)) \geq c(k) \quad \forall k \in I[u_1^{+n}, u(a_2)]$$

On a (3.12), car, en particulier

$$\sigma(u_1^{+n}, u(a_1)) \leq c(u_1^{+n}) \leq \sigma(u_1^{+n}, u(a_2))$$

Enfin, si $u_1^{+n} \leq u(a_1) \leq u(a_2)$, on a (1.12) et

$$\sigma(u_1^{+n}, u(a_1)) \geq c(k) \quad \forall k \in I[u_1^{+n}, u(a_1)]$$

On a $I[u_1^{+n}, u(a_1)] \subset I[u_1^{+n}, u(a_2)]$ et donc encore (3.12).

$\sigma(u_1^{+n}, u(a))$ (quelle que soit la fonction c !) est donc une fonction croissante de $u(a)$.

Pour $c=u(1-u)$, on a

$$\sigma(u_1^{+n}, u^n(a)) = c(\xi_1^n) = \begin{cases} c(u^n(a)) & \text{si } u^n(a) \leq u_{MA}^n \\ c(u_{MA}^n) & \text{si } u^n(a) \geq u_{MA}^n \end{cases}$$

où u_{MA}^n est défini par :

$$(5.12) \quad u_{MA}^n = \begin{cases} 0.5 & \text{si } u_1^{+n} \leq 0.5 \\ 1-u_1^{+n} & \text{si } u_1^{+n} \geq 0.5 \end{cases}$$

En choisissant toujours $c(u) = u(1-u)$, cherchons si l'équation

$$(6.12) \quad \varphi_1^n(a) = 0$$

admet une solution $u^n(a)$ dans $[0,1]$, en cherchant d'abord dans $[0, u_{MA}^n]$ puis dans $[u_{MA}^n, 1]$. Cherchons d'abord dans $[0, u_{MA}^n]$. (6.12) s'écrit :

$$r_1^n = -c(u^n(a))$$

En substituant dans (7.10), on obtient :

$$(7.12) \quad -\Delta x c(u^n(a)) - 6\alpha(u^n(a)) = -3\alpha_1^{+n} - 4\alpha_3^n + \alpha_2^{-n}$$

Dans les exemples choisis, $\alpha(u) = \epsilon u$; alors, (7.12) est une équation du second degré.

Si aucune solution est dans $[0, u_{MA}^n]$, on annule le débit en cherchant $u^n(a)$ dans $[u_{MA}^n, 1]$. Dans ce cas, (6.12) s'écrit :

$$r_1^n = -c(u_{MA}^n)$$

En utilisant (7.10), on obtient :

$$\alpha(u^n(a)) = \frac{1}{6} (-\Delta x \ c(u_{MA}^n) + 3\alpha_1^{+n} + 4\alpha_3^{\frac{n}{2}} - \alpha_2^{-n})$$

et on peut calculer $u^n(a)$ par une simple inversion de la fonction α . Si la valeur calculée n'est pas dans $[u_{MA}^n, 1]$, on pose $u^n(a)=1$ et on passe au calcul de r_1^n et ξ_1^n .

La condition (3.11) est discrétisée de façon analogue.

13 - RESULTATS NUMERIQUES (CAS AVEC CAPILLARITE)

1 - Les données

On a utilisé dans tous les cas (1.8) et on a posé

$$(1.13) \quad \alpha(u) = 0.1u$$

ou bien

$$(2.13) \quad \alpha(u) = 0.001u$$

On a choisi les conditions initiales :

$$(3.13) \quad u_0(x) = 0.25$$

ou bien

$$(4.13) \quad u_0(x) = 1 - \frac{x-a}{b-a}$$

Les conditions aux bords ont été

$$(5.13) \quad \begin{cases} u(a) = 0 \\ u(b) = 1 \end{cases}$$

ou bien

$$(6.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(a) = 1 \\ (U_b) \left\{ \begin{array}{l} u(b) \leq 1 \\ \varphi_1(u(b)) \geq 0 \\ (1-u(b)) \varphi_1(u(b)) = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

ou bien

$$(7.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} (U_a) \left\{ \begin{array}{l} u(a) \leq 1 \\ \varphi_1(u(a)) \geq 0 \\ (1-u(a)) \varphi_1(u(a)) = 0 \end{array} \right. \\ (U_b) \end{array} \right.$$

Dans tous les cas, on a posé le rapport entre le pas de temps et le pas d'espace $W = 0.05$, pour obtenir la stabilité numérique du schéma (5.10) \div (10.10).

Exemple 1 :

Les données vérifient les conditions (1.8) et (1.13) et on a choisi les conditions aux bords (5.13) et initiale (3.13). La solution calculée est très régulière ; la figure 20 montre la solution calculée au temps 1.5 qui est la solution limite. Cette solution n'est pas acceptable du point de vue physique, car les débits d'eau calculés au point a ne sont pas nuls, alors qu'en a la saturation n'est pas maximale. On a, par exemple, au temps 0.1, $u(a)=0$ par (5.13) et $\varphi_1(u(a)) = - 0.05685$.

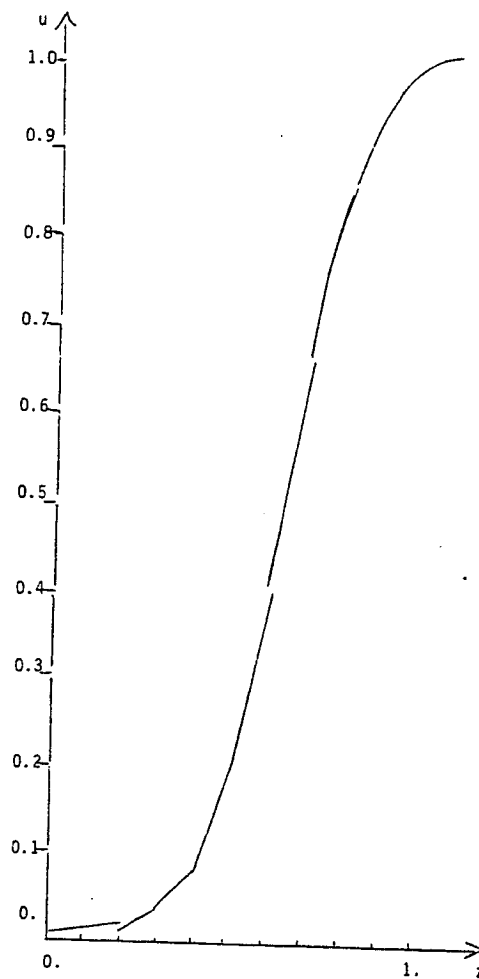


Figure 20. Exemple 1.
 $t=1.5 \quad \Delta t=0.05$

Exemple 2 :

Les données sont les mêmes que dans l'exemple 1, sauf pour la condition initiale qui est (4.13). Les figures 21 et 22 montrent la solution calculée aux temps 0.1 et 0.3, tandis que la figure 23 montre la solution limite au temps 1.5.

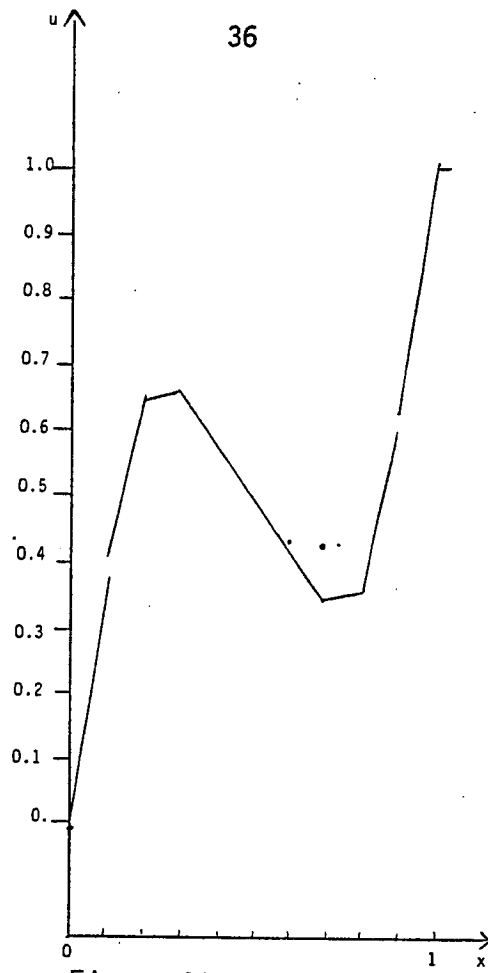


Figure 21. Example 2.
 $t=0.1$. $\Delta t=0.05$

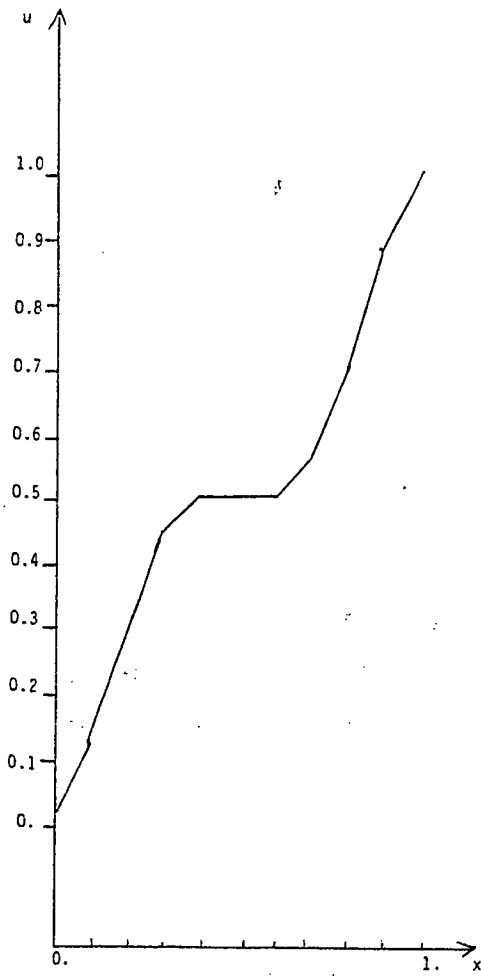


Figure 22. Example 2.
 $t=0.3$. $\Delta t=0.05$

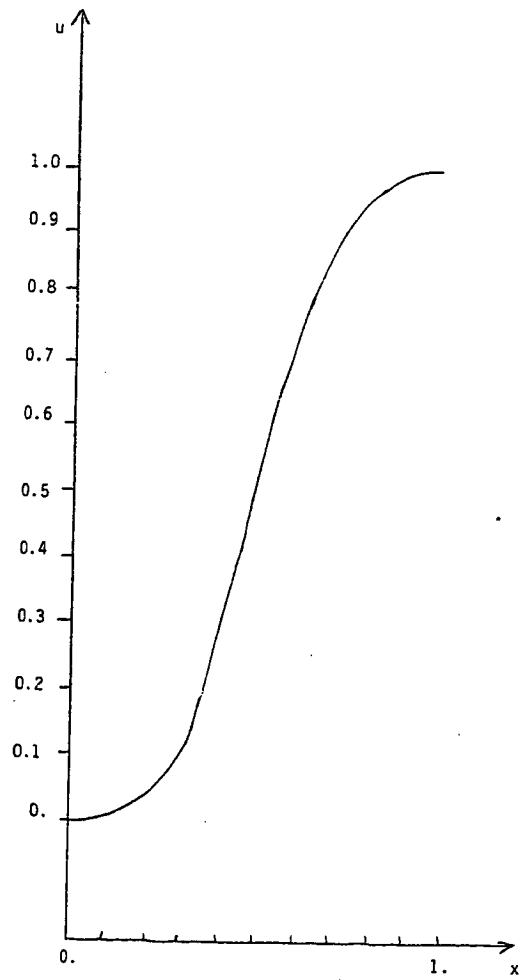


Figure 23. Example 2.
 $t=1.5$. $\Delta t=0.05$

On peut observer que au temps 0.1, la solution calculée dépasse les valeurs 0 en a et 1 en b : ce problème sera ensuite résolu, pour l'approximation numérique de l'équation avec tous les termes, en prolongeant d'une façon opportune les fonctions qui donnent le terme de transport. (cf. §4, Chapitre 2).

Exemple 3 :

Les données vérifient (1.8), (1.13), et les conditions aux bords et initiales sont (6.13) et (3.13). On peut observer que le barreau se remplit progressivement d'eau (cf. figures 24 et 25 où sont reportées les solutions calculées au temps 0.5 et 2). En a, la saturation étant maximale, l'eau rentre. En b, le débit reste nul jusqu'au temps $t=2$ car $u(b)$ reste plus petit que 1.

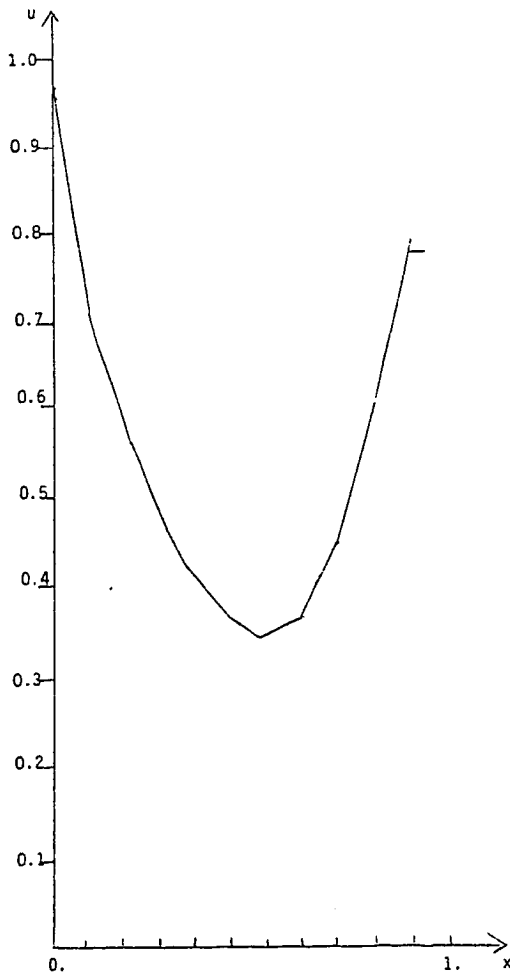


Figure 24. Exemple 3.
 $t=0.5$. $\Delta t=0.05$

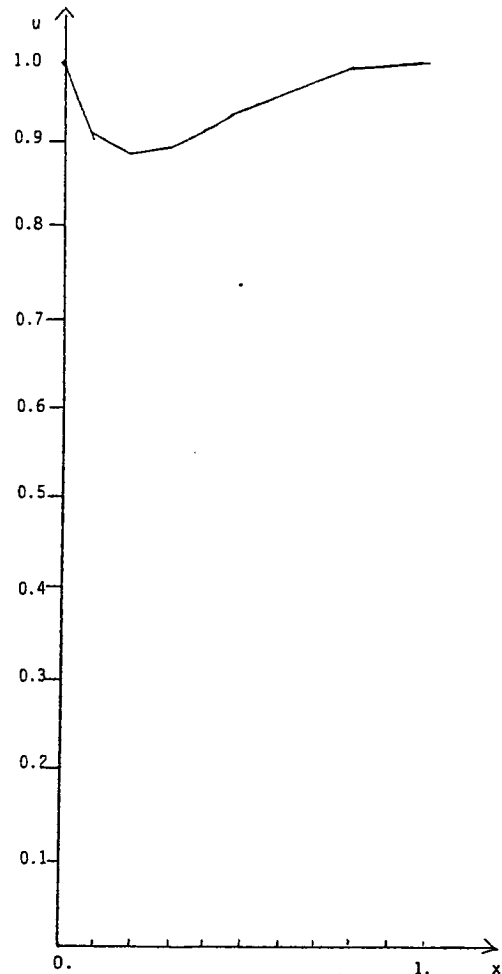


Figure 25. Exemple 3
 $t=2$ $\Delta t=0.05$

Exemple 4 :

On garde les mêmes conditions aux bords et initiales que dans l'exemple 3, les données vérifiant maintenant (1.8) et (2.13). Les figures 26 et 27 montrent les solutions calculées aux temps 0.5 et 2. Comme dans l'exemple 3, le barreau tend à se remplir d'eau. Comme la diffusion est très petite, on note la présence d'un front de discontinuité, qui avance de plus en plus vers $x=a$. Le débit d'eau en b n'est plus nul au temps $t=0.2$, où la saturation en b devient maximale, mais il se réduit progressivement jusqu'à être nul à partir du temps $t=0.6$; au contraire le débit d'eau en a n'est jamais nul.

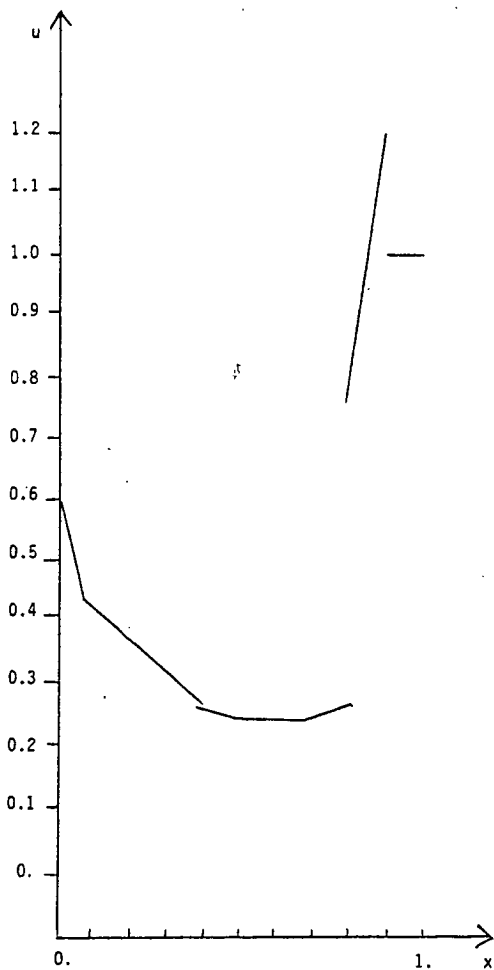


Figure 26. Exemple 4.
 $t=0.8 \quad \Delta t=0.05$

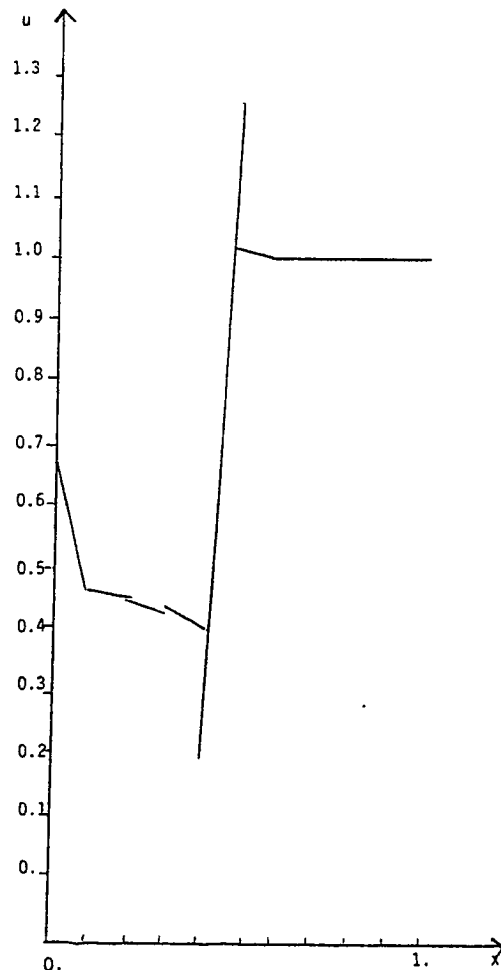


Figure 27. Exemple 4.
 $t=2 \quad \Delta t=0.05$

Exemple 5 :

Les données vérifient maintenant (1.8), (1.13), avec les conditions aux bords (7.13) et la condition initiale (3.13). La figure 28 montre la solution calculée au temps $t=2$. La solution calculée reste toujours comprise entre 0 et 1. Les débits d'eau en a et b restent nuls, jusqu'au temps $t=2$, car les saturations n'arrivent jamais à être maximales, pour $t \leq 2$.

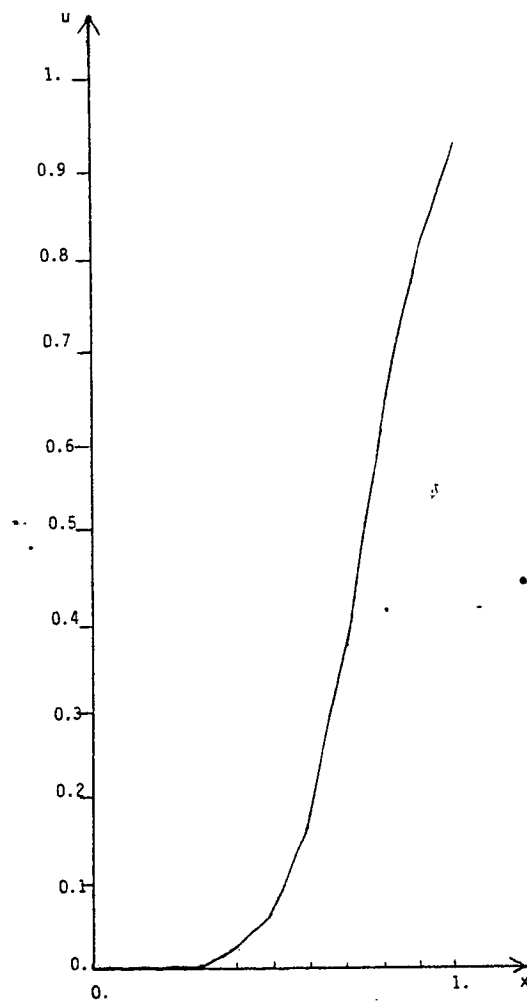
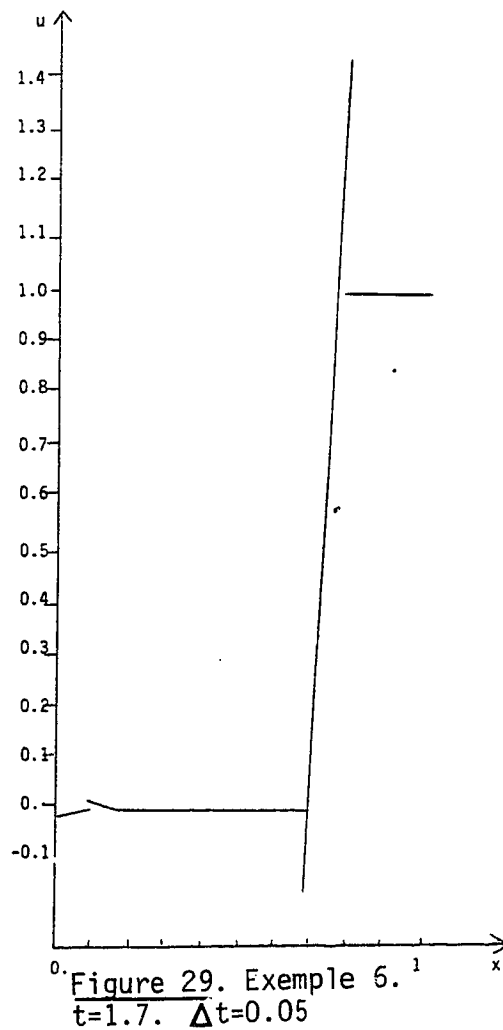


Figure 28. Exemple 5.
 $t=2$. $\Delta t=0.05$

Exemple 6 :

On a utilisé les mêmes conditions aux bords et initiales que dans l'exemple 5, mais α vérifie maintenant (2.13). La figure 29 représente la solution calculée au temps $t=1.7$. On constate, en comparant avec la figure 10, § 8.3, que cette solution calculée est très proche de la solution calculée pour l'équation du premier ordre avec la même condition initiale et les conditions aux bords (5.13). Le front de la discontinuité se place encore entre les points 0.7 et 0.8, mais il n'est pas tout à fait au milieu de l'intervalle comme dans le cas sans diffusion, car ici, il y a eu entre les instants $t=0.2$ et $t=0.5$ un débit d'eau positif en b.



Temps de calcul

Les temps d'exécution pour ces exemples ont très légèrement varié selon les conditions aux bords assignées. On a obtenu, pour les conditions aux limites (5.13) un temps de calcul de 4,19 sec. ; pour les conditions (6.13) un temps de 4,24 sec. ; tandis que pour (7.13), le temps de calcul a été 4,35 sec., dans tous les exemples ayant été traité avec les mêmes pas d'espace ($\Delta x = 0.1$) et de temps ($\Delta t = 0.05$).

CHAPITRE II

DEPLACEMENTS UNIDIMENSIONNELLES AVEC GRAVITE

1 - INTRODUCTION

Dans ce chapitre on se propose la résolution du problème (1.0) ÷ (5.0), sous les hypothèses (H), avec $q \neq 0$.

On pose \tilde{u}_1 et \tilde{u}_L respectivement les saturations minimale et maximale de l'eau et on considère les équations :

$$(1.1) \quad \phi \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial qb(u)}{\partial x} + Kg \cos \gamma \frac{\partial c(u)}{\partial x} = 0 \text{ dans } Q$$

$$(2.1) \quad r = -K \frac{\partial}{\partial x} \alpha(u) \quad \text{dans } Q$$

où

$$(3.1) \quad \alpha(u) = \int_0^u \alpha'(\tau) d\tau \quad \forall u \in [\tilde{u}_1, \tilde{u}_L]$$

$$(4.1) \quad q = Kd(u) \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho(u) \right] g \cos \gamma$$

$$(5.1) \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

avec les notations (5.0). Par (5.1) on considère, comme avant, q constante donnée.

Les conditions initiales et aux bords pour les équations (1.1), (2.1) seront données dans le paragraphe 2.

On donne maintenant le schéma numérique pour la résolution des équations, à l'intérieur du domaine, et on ne s'intéresse qu'au calcul de u (on ne calcule pas la pression P).

On définit les espaces V_h et Q_h comme dans (1.2) et (3.9) du chapitre I, et pour chaque $n=1,2,\dots,N$, on cherche un couple

$$(u^n, r^n) \in V_h \times Q_h$$

telle que, en posant :

$$(6.1) \quad f(u) = qb(u) + K.g.\cos\gamma.c(u)$$

soit

$$(7.1) \quad \begin{aligned} & \Phi \int_{I_i} \frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t} v dx + \int_{I_i} \frac{\partial r^n}{\partial x} v dx + \int_{I_i} q \frac{\partial b(u^n)}{\partial x} v dx + \\ & + K.g.\cos\gamma \int_{I_i} \frac{\partial c(u^n)}{\partial x} v dx + (f(u_i^{+n}) - f(\xi_i^n))v(x_i) - \\ & - (f(u_{i+1}^n) - f(\xi_{i+1}^n))v(x_{i+1}) = 0 \quad \forall i=1,\dots,I, \quad \forall v \in V_h \end{aligned}$$

$$(8.1) \quad \int_{\Omega} \frac{r^n s}{K} dx = \int_{\Omega} \alpha(u^n) \frac{ds}{dx} dx - \alpha(u(b, t^n))s(b) + \alpha(u(a, t^n))s(a) \\ \forall s \in Q_h$$

où ξ_i^n , $i=1,\dots,I+1$, vérifient :

$$(9.1) \quad \begin{aligned} & \xi_i^n \in I[u_i^{-n}, u_i^{+n}] \\ & \operatorname{sgn}(u_i^{+n} - u_i^{-n})f(\xi_i^n) \leq \operatorname{sgn}(u_i^{+n} - u_i^{-n})f(k) \quad \forall k \in I[u_i^{-n}, u_i^{+n}] \end{aligned}$$

2 - ETUDE DU SCHEMA (7.1), (8.1), (9.1) POUR $k=1$

On voit bien que les équations (7.1), (8.1) sont analogues aux équations (4.9), (5.9) du chapitre I, où on substitue à la fonction $c(u)$ la fonction $f(u)$ définie par (6.1). On est donc conduit à utiliser les relations (7.10) ÷ (10.10) du premier chapitre (en remplaçant $\frac{1}{\Delta x}$ par $\frac{K}{\Delta x}$) et les relations :

$$(1.2) \quad u_i^{+n+1} = u_i^{+n} - \frac{W}{\Phi} [(-3r_{2i-1}^n + 4r_{2i}^n - r_{2i+1}^n) + (f_i^{+n} + 4f_{i+\frac{1}{2}}^{+n} + f_{i+1}^n) - 4f(\xi_i^n) - 2f(\xi_{i+1}^n)]$$

$$(2.2) \quad u_{i+1}^{-n+1} = u_{i+1}^{-n} - \frac{W}{\Phi} [(r_{2i-1}^n - 4r_{2i}^n + 3r_{2i+1}^n) + (-f_i^{+n} - 4f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i+1}^n) + 4f(\xi_{i+1}^n) + 2f(\xi_i^n)]$$

où $f(\xi_i^n)$, $i=1, \dots, I+1$ sont définies par (9.1) et sont déterminées d'une façon qu'on expliquera plus loin.

3 - CONDITIONS AUX LIMITES ET INITIALES

Les débits d'eau, exprimés en (6.0), seront approchés en a et b, à chaque temps t^n par :

$$(1.3) \quad \varphi_1(u^n(a)) = q^n + f(\xi_1^n) + r_1^n$$

$$(2.3) \quad \varphi_1(u^n(b)) = q^n + f(\xi_{I+1}^n) + r_{2I+1}^n$$

où

$$(3.3) \quad \begin{cases} \xi_1^n \in I[u^n(a), u_1^{+n}] \\ \text{sgn}(u_1^{+n} - u^n(a))f(\xi_1^n) \leq \text{sgn}(u_1^{+n} - u^n(a))f(k) \quad \forall k \in I[u^n(a), u_1^{+n}] \end{cases}$$

et

$$(4.3) \quad \begin{cases} \xi_{I+1}^n \in I[u_{I+1}^{-n}, u^n(b)] \\ \text{sgn}(u^n(b) - u_{I+1}^{-n})f(\xi_{I+1}^n) \leq \text{sgn}(u^n(b) - u_{I+1}^{-n})f(k) \quad \forall k \in I[u_{I+1}^{-n}, u^n(b)] \end{cases}$$

De même les débits d'huile seront approchés en a et b par :

$$(5.3) \quad \varphi_2(u^n(a)) = q^n - f(\xi_1^n) - r_1^n$$

$$(6.3) \quad \varphi_2(u^n(b)) = q^n - f(\xi_{I+1}^n) - r_{2I+1}^n$$

Les conditions aux limites qu'on a posées sont différentes selon que l'on est sur la frontière d'injection ($x: \vec{q} \cdot \vec{v}(x) \leq 0$, \vec{v} normale extérieure à Ω , ici $x=a$) ou sur la frontière de production ($x: \vec{q} \cdot \vec{v}(x) \geq 0$, ici $x=b$).

Sur la frontière d'injection $x=a$ on peut avoir :

- soit une condition de Dirichlet (D_a)

$$(7.3) \quad u(a, t) = g_a(t), \text{ donnée} \quad \forall t > 0$$

avec

$$\tilde{u}_1 \leq g_a(t) \leq \hat{u}_L$$

On peut alors avoir des débits simultanés d'eau et d'huile, non nuls même si $g_a(t) < \tilde{u}_L$.

Pour $g_a(t) = \tilde{u}_L$, si on suppose

$$(8.3) \quad u_0(x) = 0$$

on peut avoir un débit sortant d'huile, dans les premiers instants des observations.

- soit une condition d'injection d'huile (H_a) :

$$(9.3) \quad \varphi_1(u^n(a)) = 0 \quad \forall n=1, \dots, N$$

Cela implique qu'un seul fluide peut traverser la frontière et donc $u^n(a)$ peut prendre des valeurs quelconques entre 0 et 1.

- soit une condition d'injection d'eau (E_a) :

$$(10.3) \quad \varphi_1(u^n(a)) = 2q \quad \forall n=1, \dots, N$$

qui implique que $\varphi_2(u^n(a)) = 0$. Comme dans H_a , un seul fluide peut traverser la frontière en $x=a$, et $u^n(a) \in [0,1]$.

Sur la frontière de production on peut avoir :

- soit une condition de Dirichlet (D_b)

$$(11.3) \quad u(b,t) = g_b(t), \text{ donnée} \quad \forall t \in [0,T]$$

avec

$$\tilde{u}_1 \leq g_b(t) \leq \tilde{u}_L$$

et on note encore, qu'avec $g_b(t) \neq \tilde{u}_L$, on peut avoir des débits d'eau et d'huile non nuls simultanément, tandis que pour $g_b(t) = \tilde{u}_L$, avec une condition initiale (8.3), on peut avoir une entrée d'eau.

- soit une condition unilatérale (U_b) :

$$(12.3) \quad \begin{cases} \varphi_1(u^n(b)) \geq 0 \\ u^n(b) \leq \tilde{u}_L \\ \varphi_1(u^n(b))(\tilde{u}_L - u^n(b)) = 0 \end{cases}$$

Cette condition due aux phénomènes capillaires, signifie que, si $u^n(b) < \tilde{u}_L$, alors $\varphi_1(u^n(b)) = 0$ et seule l'huile peut traverser la frontière ; sinon $u^n(b) = \tilde{u}_L$ et $\varphi_1(u^n(b)) \geq 0$, les deux fluides traversent la frontière mais l'eau ne peut que sortir.

La condition initiale sera :

$$(13.3) \quad u(x,0) = u_0(x)$$

On supposera dans la suite que :

$$(14.3) \quad \begin{cases} q(t) \geq 0 & \forall t \in]0, T[\\ \alpha(0) = 0 & \alpha'(\xi) \geq 0 & \forall \xi \in R \\ c(u) \text{ continue, } c(u) = 0 & u \notin [\tilde{u}_1, \tilde{u}_L] \end{cases}$$

4 - PROLONGEMENT DE LA FONCTION $b(u)$

On a vu que dans certains cas (cf exemple 2 du § 13) la solution calculée u pouvait sortir de l'intervalle $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_L]$. Pour résoudre ce problème, on est amené à prolonger b de façon adéquate.

On suppose calculées les valeurs \tilde{b}_ℓ , $\ell=1, \dots, L$ de la fonction $b(u)$ dans les points $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_L$ de discrétisation de $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_L]$, avec $\tilde{u}_1 \geq 0$, $\tilde{u}_L \leq 1$ et $\tilde{b}_1 = -1$, $\tilde{b}_L = 1$.

Une simple façon de prolonger la fonction b est la suivante : on pose, quelles que soient les conditions aux bords :

$$(1.4) \quad b(u) = \lambda(u - \tilde{u}_L) + \tilde{b}_L \quad \text{si } u > \tilde{u}_L$$

avec $\lambda > 0$ (dans les expériences numériques de l'ordre de 50), et :

$$(2.4) \quad b(u) = \tilde{b}_1 \quad \text{si } u < \tilde{u}_1$$

5 - APPROXIMATION NUMERIQUE DES FONCTIONS $a(u)$, $\alpha(u)$, $c(u)$, $b(u)$

On suppose calculées les valeurs $\tilde{\alpha}'_\ell$, b_ℓ , c_ℓ , $\ell=1, \dots, L$ des fonctions α' , b , c aux mêmes points \tilde{u}_ℓ . De plus, $\tilde{\alpha}'_\ell$ vérifie :

$$\tilde{\alpha}'_1 = \tilde{\alpha}'_L = 0$$

On pose alors :

$$\alpha'(u) = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{L-1} \left[\tilde{\alpha}'_\ell + \frac{\tilde{\alpha}'_{\ell+1} - \tilde{\alpha}'_\ell}{\tilde{u}_{\ell+1} - \tilde{u}_\ell} (u - \tilde{u}_\ell) \right] \chi_\ell(u) & \tilde{u}_1 \leq u \leq \tilde{u}_L \\ 0 & u \notin [\tilde{u}_1, \tilde{u}_L] \end{cases}$$

$$c(u) = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{L-1} \left[\tilde{c}_\ell + \frac{\tilde{c}_{\ell+1} - \tilde{c}_\ell}{\tilde{u}_{\ell+1} - \tilde{u}_\ell} (u - \tilde{u}_\ell) \right] \chi_\ell(u) & \tilde{u}_1 \leq u \leq \tilde{u}_L \\ 0 & u \notin [\tilde{u}_1, \tilde{u}_L] \end{cases}$$

où $\chi_\ell(u)$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $[\tilde{u}_\ell, \tilde{u}_{\ell+1}]$.

On calcule aussi une approximation de la fonction $\alpha(u)$ linéaire par morceaux.

On pose, en effet :

$$\tilde{\alpha}_\ell = \alpha(\tilde{u}_\ell) = \int_{\tilde{u}_1}^{\tilde{u}_\ell} a(u) du = \sum_{k=1}^{\ell-1} \int_{\tilde{u}_k}^{\tilde{u}_{k+1}} a(u) du \approx \sum_{k=1}^{\ell-1} \frac{\tilde{a}_k + \tilde{a}_{k+1}}{2} (\tilde{u}_{k+1} - \tilde{u}_k)$$

et on obtient :

$$\alpha(u) = \begin{cases} 0 & u < \tilde{u}_1 \\ \sum_{\ell=1}^{L-1} [\tilde{\alpha}_\ell + \frac{\tilde{\alpha}_{\ell+1} - \tilde{\alpha}_\ell}{\tilde{u}_{\ell+1} - \tilde{u}_\ell} (u - \tilde{u}_\ell)] \chi_\ell(u) & u \in [\tilde{u}_1, \tilde{u}_L] \\ \tilde{\alpha}_L & u > \tilde{u}_L \end{cases}$$

Enfin, on aura

$$b(u) = \sum_{\ell=1}^{L-1} [\tilde{b}_\ell + \frac{\tilde{b}_{\ell+1} - \tilde{b}_\ell}{\tilde{u}_{\ell+1} - \tilde{u}_\ell} (u - \tilde{u}_\ell)] \chi_\ell(u) \quad u \in [\tilde{u}_1, \tilde{u}_L]$$

tandis que pour le prolongement de cette fonction à l'extérieur de $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_L]$, on utilisera (1.4), (2.4).

6 - DETERMINATION NUMERIQUE DES VALEURS $f(\xi_i^n)$, $i=1, \dots, I+1$

Comme la fonction f est linéaire par morceaux, on peut déterminer les valeurs $f(\xi_i^n)$ définies par (9.1), de la façon suivante. Si u_i^{-n} et u_i^{+n} sont dans $[\tilde{u}_1, \tilde{u}_L]$, on détermine les intervalles

$$[\tilde{u}_\ell, \tilde{u}_{\ell+1}] \text{ tel que } u_i^{-n} \in [\tilde{u}_\ell, \tilde{u}_{\ell+1}]$$

et

$$[\tilde{u}_k, \tilde{u}_{k+1}] \text{ tel que } u_i^{+n} \in [\tilde{u}_k, \tilde{u}_{k+1}]$$

et on pose, si $\ell=k$

$$(1.6) \quad f(\xi_i^n) = \begin{cases} \min\{f(u_i^{-n}), f(u_i^{+n})\} & \text{si } u_i^{-n} \leq u_i^{+n} \\ \max\{f(u_i^{-n}), f(u_i^{+n})\} & \text{si } u_i^{-n} > u_i^{+n} \end{cases}$$

si $\ell < k$

$$(2.6) \quad f(\xi_i^n) = \min\{f(u_i^{-n}), f(u_i^{+n}), f(\tilde{u}_j), \quad j=\ell+1, \dots, k\}$$

si $\ell > k$

$$(3.6) \quad f(\xi_i^n) = \max\{f(u_i^{-n}), f(u_i^{+n}), f(\tilde{u}_j), \quad j=k+1, \dots, \ell\}$$

si $u_i^{-n} < \tilde{u}_1$ et $u_i^{+n} < \tilde{u}_1$ ou bien $u_i^{-n} > \tilde{u}_L$ et $u_i^{+n} > \tilde{u}_L$, on utilisera (1.6) ;

si $u_i^{-n} < \tilde{u}_1$ et $u_i^{+n} > \tilde{u}_L$, on prendra :

$$(4.6) \quad f(\xi_i^n) = \min\{f(u_i^{-n}), f(u_i^{+n}), f(\tilde{u}_j), \quad j=1, \dots, L\}$$

si $u_i^{-n} > \tilde{u}_L$ et $u_i^{+n} < \tilde{u}_1$, on prendra :

$$(5.6) \quad f(\xi_i^n) = \max\{f(u_i^{-n}), f(u_i^{+n}), f(\tilde{u}_j), \quad j=1, \dots, L\}$$

si $u_i^{-n} < \tilde{u}_1$ et s'il existe un k tel que $u_i^{+n} \in [\tilde{u}_k, \tilde{u}_{k+1}]$, on prendra :

$$(6.6) \quad f(\xi_i^n) = \min\{f(u_i^{-n}), f(u_i^{+n}), f(\tilde{u}_j), \quad j=1, \dots, k\}$$

si $u_i^{-n} > \tilde{u}_L$ et s'il existe un k tel que $u_i^{+n} \in [\tilde{u}_k, \tilde{u}_{k+1}]$, on prendra :

$$(7.6) \quad f(\xi_i^n) = \max\{f(u_i^{-n}), f(u_i^{+n}), f(u_j), \quad j=k+1, \dots, L\}$$

s'il existe un ℓ tel que $u_i^{-n} \in [\tilde{u}_\ell, \tilde{u}_{\ell+1}]$ et $u_i^{+n} < \tilde{u}_1$, on prendra :

$$(8.6) \quad f(\xi_i^n) = \max\{f(u_i^{-n}), f(u_i^{+n}), f(\tilde{u}_j), \quad j=1, \dots, \ell\}$$

s'il existe un ℓ tel que $u_i^{-n} \in [\tilde{u}_\ell, \tilde{u}_{\ell+1}]$ et $u_i^{+n} > \tilde{u}_L$, on prendra

$$(9.6) \quad f(\xi_i^n) = \min\{f(u_i^{-n}), f(u_i^{+n}), f(\tilde{u}_j), \quad j=\ell+1, \dots, L\}$$

7 - RESOLUTION NUMERIQUE DES CONDITIONS AUX BORDS

D'après (1.3) et en rappelant que, en utilisant la formule de Simpson, on a $\forall n$:

$$(1.7) \quad r_1^n = \frac{K}{\Delta x} [6\alpha(u^n(a)) - 3\alpha_1^{+n} - 4\alpha_3^n + \alpha_2^{-n}]$$

la condition

$$(2.7) \quad \varphi_1(u^n(a)) = 0$$

équivalent à

$$(3.7) \quad \psi(u^n(a)) = 6K\alpha(u^n(a)) + \Delta x \cdot f(\xi_1^n) + q\Delta x + K(-3\alpha_1^{+n} - 4\alpha_3^n + \alpha_2^{-n}) = 0$$

où ξ_1^n est définie par (3.3). Pour chaque u_1^{+n} fixée, $f(\xi_1^n)$ est une fonction qui dépend de $u^n(a)$ et qu'on note $\sigma(u_1^{+n}, u^n(a))$. Alors, (3.7) s'écrit :

$$(4.7) \quad \psi(u^n(a)) = 5K\alpha(u^n(a)) + \Delta x \cdot \sigma(u_1^{+n}, u^n(a)) + q\Delta x + K(-3\alpha_1^{+n} - 4\alpha_3^n + \alpha_2^{-n}) = 0$$

Comme au paragraphe 12, du chapitre I, on peut encore démontrer que $\sigma(u_1^{+n}, u^n(a))$ est une fonction croissante de $u^n(a)$. Donc, grâce à (14.3), $\psi(u^n(a))$ est une fonction croissante de $u^n(a)$. Du fait des interpolations linéaires utilisées pour les fonctions α , b et c , $\psi(u^n(a))$ est aussi une fonction linéaire par morceaux.

La détermination du point $u^n(a)$ [s'il existe !] qui vérifie (4.7) est faite en cherchant, parmi les intervalles $[\tilde{u}_\ell, \tilde{u}_{\ell+1}]$ $\ell=1, \dots, L-1$, celui où la fonction ψ change de signe. On précise ici les étapes de la résolution de la l'équation (2.7).

a) On pose $\text{COST} = q\Delta x - 3\alpha_1^{+n} - 4\alpha_3^n + \alpha_2^{-n}) K$

donc $\psi(u^n(a)) = 6K\alpha(u^n(a)) + \Delta x \cdot \sigma(u_1^{+n}, u^n(a)) + \text{COST}$

b) on détermine l'intervalle $[\tilde{u}_\ell, \tilde{u}_{\ell+1}]$ tel que $u_1^{+n} \in [\tilde{u}_\ell, \tilde{u}_{\ell+1}]$

c) on calcule $\sigma(u_1^{+n}, \tilde{u}_\ell) = \min\{f(\tilde{u}_\ell), f(u_1^{+n})\}$;

$$\sigma(u_1^{+n}, \tilde{u}_{\ell+1}) = \max\{f(u_1^{+n}), f(\tilde{u}_{\ell+1})\} ;$$

ce qui permet de calculer $\psi(\tilde{u}_\ell)$ et $\psi(\tilde{u}_{\ell+1})$.

si $\text{sgn}(\psi(\tilde{u}_\ell)) = \text{sgn}(\psi(\tilde{u}_{\ell+1})) > 0$ on va au point (e) ;

si $\text{sgn}(\psi(\tilde{u}_\ell)) = \text{sgn}(\psi(\tilde{u}_{\ell+1})) < 0$ on va au point (f) ;

si $\text{sgn}(\psi(\tilde{u}_\ell)) \neq \text{sgn}(\psi(\tilde{u}_{\ell+1}))$, on pose

$$d) \quad u^n(a) = \frac{\tilde{u}_\ell \psi(\tilde{u}_{\ell+1}) - \tilde{u}_{\ell+1} \psi(\tilde{u}_\ell)}{\psi(\tilde{u}_{\ell+1}) - \psi(\tilde{u}_\ell)}$$

e) on calcule $\sigma(u_1^{+n}, \tilde{u}_{\ell-1}) = \min\{\sigma(u_1^{+n}, \tilde{u}_\ell), f(\tilde{u}_{\ell-1})\}$ et $\psi(\tilde{u}_{\ell-1})$

si $\text{sgn}(\psi(\tilde{u}_{\ell-1})) \neq \text{sgn}(\psi(\tilde{u}_\ell))$, on calcule (d), où on a posé $\ell = \ell - 1$;

si $\text{sgn}(\psi(\tilde{u}_{\ell-1})) = \text{sgn}(\psi(\tilde{u}_\ell))$, on pose $\ell = \ell - 1$;

si $\ell \geq 1$, on va en (e) ; si $\ell < 1$ on va en (g)

f) on calcule $\sigma(u_1^{+n}, \tilde{u}_{\ell+2}) = \max\{\sigma(u_1^{+n}, \tilde{u}_{\ell+1}), f(\tilde{u}_{\ell+2})\}$ et $\psi(\tilde{u}_{\ell+2})$

si $\text{sgn}(\psi(\tilde{u}_{\ell+1})) \neq \text{sgn}(\psi(\tilde{u}_{\ell+2}))$, on calcule (d), où on a posé $\ell = \ell + 1$;

si $\text{sgn}(\psi(\tilde{u}_{\ell+1})) = \text{sgn}(\psi(\tilde{u}_{\ell+2}))$, on pose $\ell = \ell + 1$;

si $\ell \leq L$, on va en (f) ; si $\ell > L$ on va en (g).

g) on pose $u^n(a) = \tilde{u}_L$ et on passe au calcul de r_1^n par (1.7), ξ_1^n par (3.3) et $\varphi_1(u^n(a))$ par (1.3).

Il faut maintenant étudier le cas où, pour des raisons numériques, on a :

$$u_1^{+n} \notin [\tilde{u}_1, \tilde{u}_L]$$

Si $u_1^{+n} < \tilde{u}_1$, on a, d'après (3.3) et (1.5) :

$$\psi(u_1^{+n}) = \psi(\tilde{u}_1)$$

On peut avoir trois cas :

si $\psi(\tilde{u}_1) = 0$, on a, naturellement que

$$u(a) = \tilde{u}_1 \text{ et } \varphi_1(a) = 0$$

si $\psi(\tilde{u}_1) > 0$, d'après (3.3) on a :

$$\sigma(u_1^{+n}, u) = f(u_1^{+n}) \quad \forall u < u_1^{+n}$$

et par (1.5) $\psi(u)$ est une fonction constante par $u < u_1^{+n}$ et donc on aura

$$\psi(u) > 0 \quad \forall u < u_1^{+n}$$

On pose alors :

$$u(a) = \tilde{u}_L$$

et on passe au calcul du débit.

si $\psi(\tilde{u}_1) < 0$, on procède comme dans (f), où on pose $\ell = 0$.

Si $u_1^{+n} > \tilde{u}_L$, d'après (3.3) on a

$$\sigma(u_1^{+n}, \tilde{u}_L) = f(\tilde{u}_L) < f(u_1^{+n})$$

et on calcule $\psi(u_1^{+n})$ et $\psi(\tilde{u}_L)$.

Si $\text{sgn}(\psi(u_1^{+n})) \neq \text{sgn}(\psi(\tilde{u}_L))$, on calcule $u(a)$ par :

$$(5.7) \quad u(a) = \frac{\tilde{u}_L \psi(u_1^{+n}) - u_1^{+n} \psi(\tilde{u}_L)}{\psi(u_1^{+n}) - \psi(\tilde{u}_L)}$$

et $u(a)$ vérifie $u(a) < u_1^{+n}$

Si $\text{sgn}(\psi(u_1^{+n})) = \text{sgn}(\psi(\tilde{u}_L)) < 0$, on calcule encore $u(a)$ par (5.7) mais on a alors $u(a) > u_1^{+n}$ (dans ce cas, on a une propagation de l'erreur d'approximation sur le bord).

Si $\text{sgn} \psi(u_1^{+n}) = \text{sgn} \psi(\tilde{u}_L) > 0$, on procède comme dans (e), où on pose $\ell=L$.

8 - RESULTATS NUMERIQUES

On a effectué les premiers essais sur les données employées au chapitre 1, mais en donnant les fonctions $c(u)$ et $\alpha(u)$ par points. On a obtenu, pour ces cas, des résultats tous à fait semblables à ceux qu'on avait quand ces fonctions étaient données de façon analytique.

Ensuite on a employé les données suivantes :

$$a = 0 \text{ cm}$$

$$b = 38 \text{ cm}$$

$$Q = .9458 * 10^{-2} \text{ cm}^3/\text{sec.}$$

$$\sigma = 20 \text{ cm}^2$$

$$q = \frac{Q}{2\sigma} = 23645 * 10^{-3} \text{ cm/sec.}$$

$$\Phi = .099$$

$$K = .819 * 10^{-9}$$

	0	0.05	0.15	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60	0.65
α'	0	.2591*10 ⁶	.38*10 ⁶	.3899*10 ⁶	.5762*10 ⁶	.6541*10 ⁶	.6726*10 ⁶	.5582*10 ⁶	.2562*10 ⁶	.1432*10 ⁶	.7427*10 ⁵	0.
	-1.	-.8091	-.1720	.4286	.6385	.8140	.8841	.9350	.9740	.9858	.9934	1.0
	0	.2135*10 ²	.5532*10 ²	.5395*10 ²	.4522*10 ²	.3162*10 ²	.2463*10 ²	.1682*10 ²	.8601*10 ¹	.5758*10 ¹	.2895*10 ¹	0.
	0.	.6477*10 ⁴	.3843*10 ⁵	.7593*10 ⁵	.1011*10 ⁶	.1318*10 ⁶	.1650*10 ⁶	.1958*10 ⁶	.2161*10 ⁶	.2261*10 ⁶	.2316*10 ⁶	.2334*10 ⁶

Les valeurs des fonctions données dans ce tableau ont été obtenues de la façon décrite au § 5.

On a considéré les trois cas suivants :

$$(1.8) \quad \cos \gamma = 1$$

ou bien

$$(2.8) \quad \cos \gamma = 0$$

ou bien

$$(3.8) \quad \cos \gamma = -1$$

Les conditions à la limite en a considérées ont été :

- soit (D_a) Dirichlet

$$(4.8) \quad u(a, t) = 0.65 \quad \forall t \in]0, T[$$

- soit (H_a) Injection d'huile en a

$$(5.8) \quad \varphi_1(u(a)) = 0 \quad \forall t \in]0, T[$$

- soit (E_a) Injection d'eau en a

$$(6.8) \quad \varphi_1(u(a)) = 2q \quad \forall t \in]0, T[$$

Les conditions à la limite en b considérées ont été :

- soit (D_b) Dirichlet

$$(7.8) \quad u(b, t) = 0 \quad \forall t \in]0, T[$$

ou bien

$$(8.8) \quad u(b, t) = 0.65 \quad \forall t \in]0, T[$$

- soit (U_b) . Condition unilatérale :

$$(9.8) \quad \begin{cases} 0 \leq u(b) \leq 0.65 \\ \varphi_1(u(b)) \geq 0 \\ (u(b) - 0.65) \cdot \varphi_1(u(b)) = 0 \end{cases} \quad \forall t \in]0, T[$$

Les conditions initiales choisies ont été :

$$(10.8) \quad u(x, 0) = 0$$

ou bien

$$(11.8) \quad u(x, 0) = 0.20$$

Exemple 1 :

Avec les données (1.8), (4.8), (7.8), (10.8) on observe comment un barreau plein d'huile qui est en contact avec de l'eau en haut et de l'huile en bas tend progressivement à se remplir d'eau (sur les figures 30 et 31 sont reportées les solutions calculées respectivement aux temps $t=400$ sec. et $t=1600$ sec.). L'eau avance avec une vitesse importante due à l'effet de la gravité.

Au temps $t=1760$ sec., l'eau commence à sortir par le bas du barreau tandis que jusqu'à cet instant seule l'huile sortait. Il est intéressant d'étudier l'évolution de la fonction $\varphi_2(u(a))$ au cours du temps. Elle est représentée sur la figure 32.

On voit qu'en haut on a une sortie d'huile très forte dans les premiers instants et qui tend vers zéro au cours du temps. On en conclut, en comparant ces résultats avec ceux de l'exemple 6 ci-dessous, qu'il ne faut pas imposer une saturation maximale en haut si on ne veut pas avoir une perte d'huile.

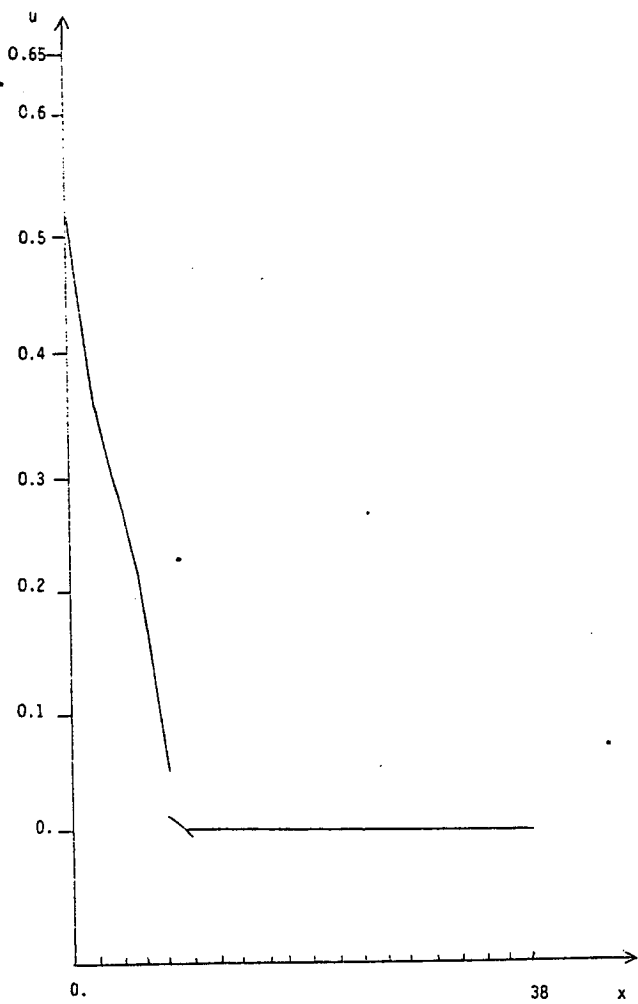


Figure 30. Exemple 1.
 $t=400$. $\Delta t=8$

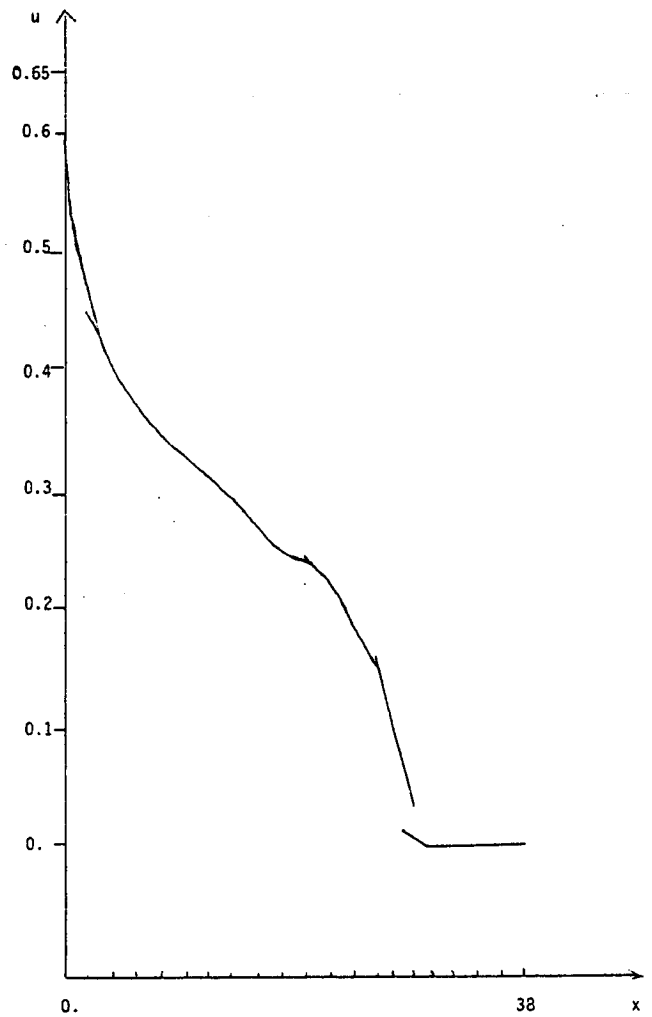


Figure 31. Exemple 1.
 $t=1600$ $\Delta t=8$

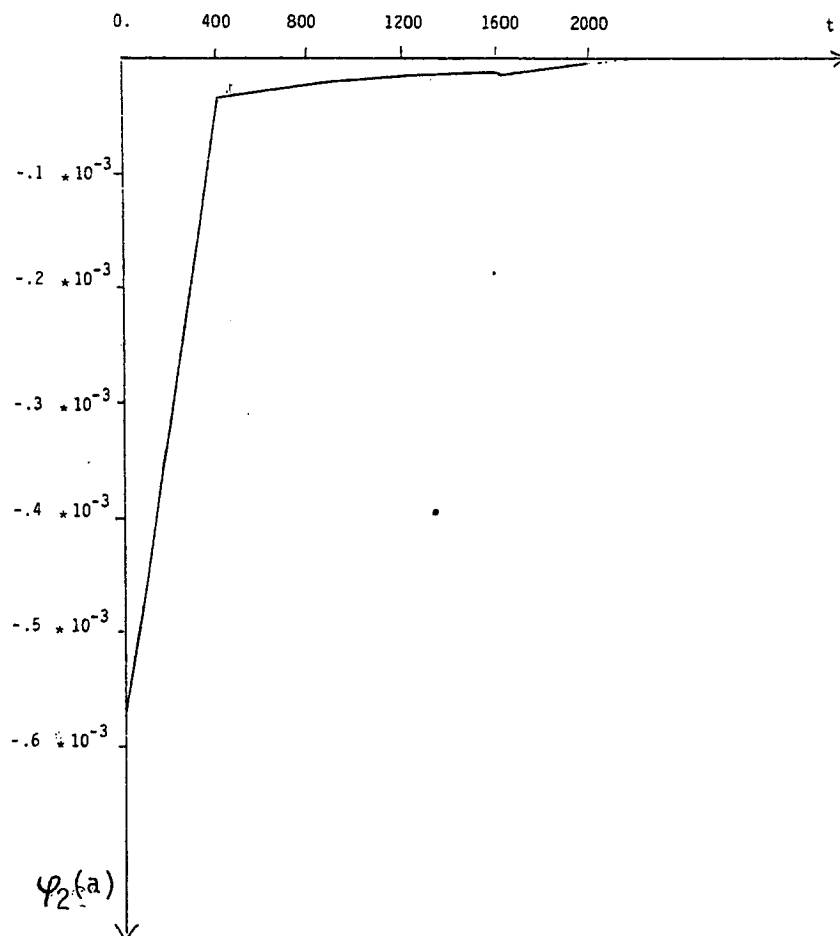


Figure 32. Exemple 1.
 Débit d'huile au cours du temps

Exemple 2 :

Les données sont (2.8), (4.8), (7.8), (10.8) : on obtient une solution qui a la même allure que celle de l'exemple 1, mais le barreau se remplit d'eau moins rapidement. Sur la figure 33 est dessinée la solution calculée au temps $t=1600$ sec. (comparer avec la figure 31). Jusqu'au temps $t=2000$ le débit d'eau à la sortie est nul. L'allure de la courbe $\varphi_2(a)$ au cours du temps est semblable à celle de l'exemple 1, mais elle tend vers zéro un peu plus rapidement.

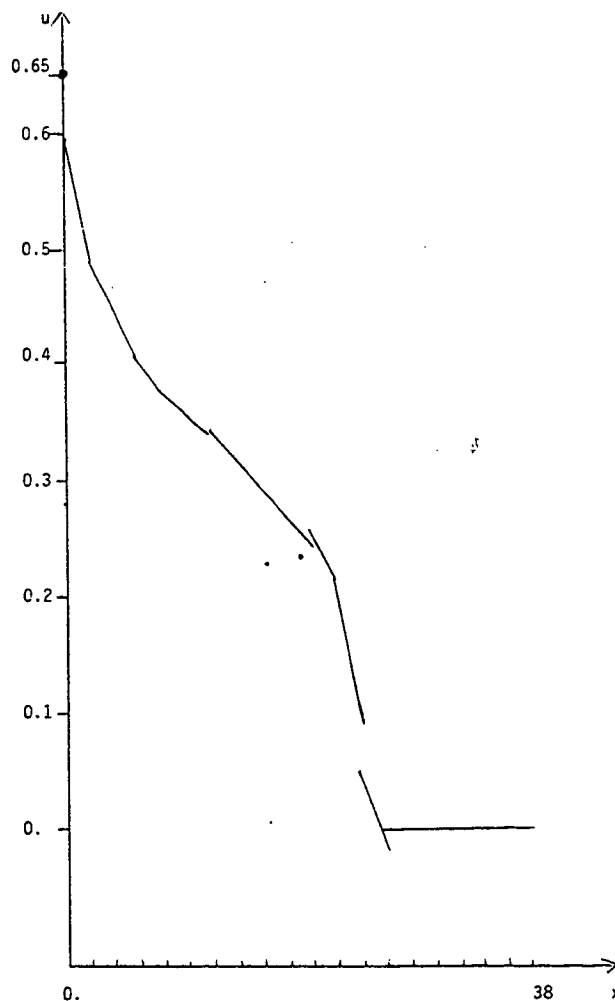


Figure 33. Exemple 2.
 $t=1600 \quad \Delta t=8$

Exemple 3 :

Les données sont les mêmes que pour l'exemple 1, sauf pour q qui vérifie maintenant $q = 0$, ceci pour étudier l'effet de la gravité seule, sans aucun débit d'eau injecté.

On voit sur la figure 34 représentant la solution pour $t=2000$ s, que cet effet n'est pas négligeable.

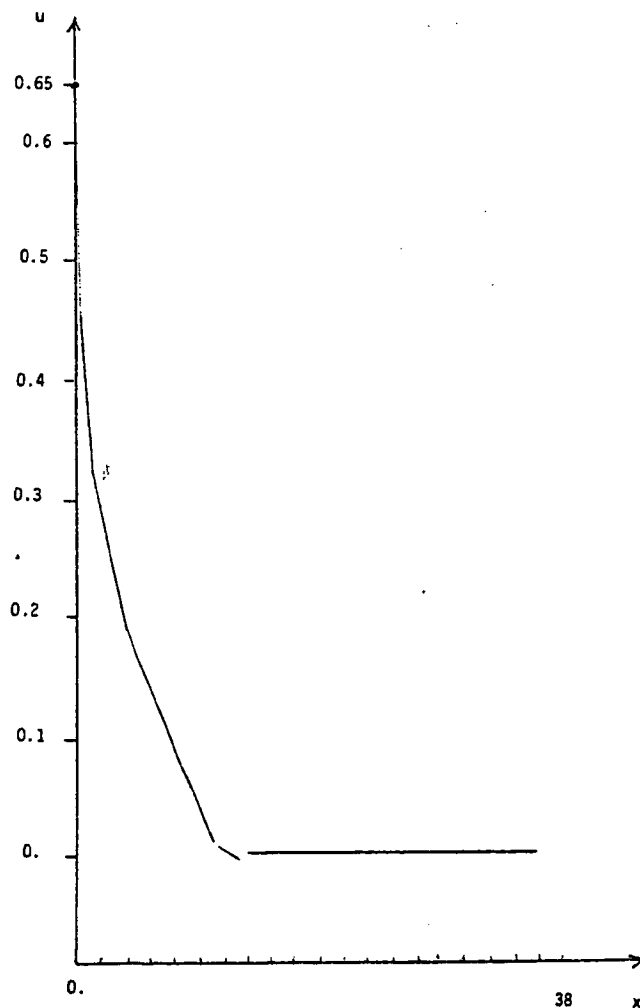


Figure 34. Exemple 3
 $t=2000$ $\Delta t=8$

Exemple 4 :

Les données sont (1.8), (5.8), (8.8), (11.8). La figure 35 représente la solution calculée au temps $t=1000$. L'eau qui est en bas du barreau tend à rentrer dans les premiers instants, en restant accumulée en bas ; l'eau qui est dans le barreau, par effet de la gravité, tend à descendre et le barreau reste de plus en plus plein d'huile uniformément en haut, tandis qu'en bas l'eau sort très lentement.

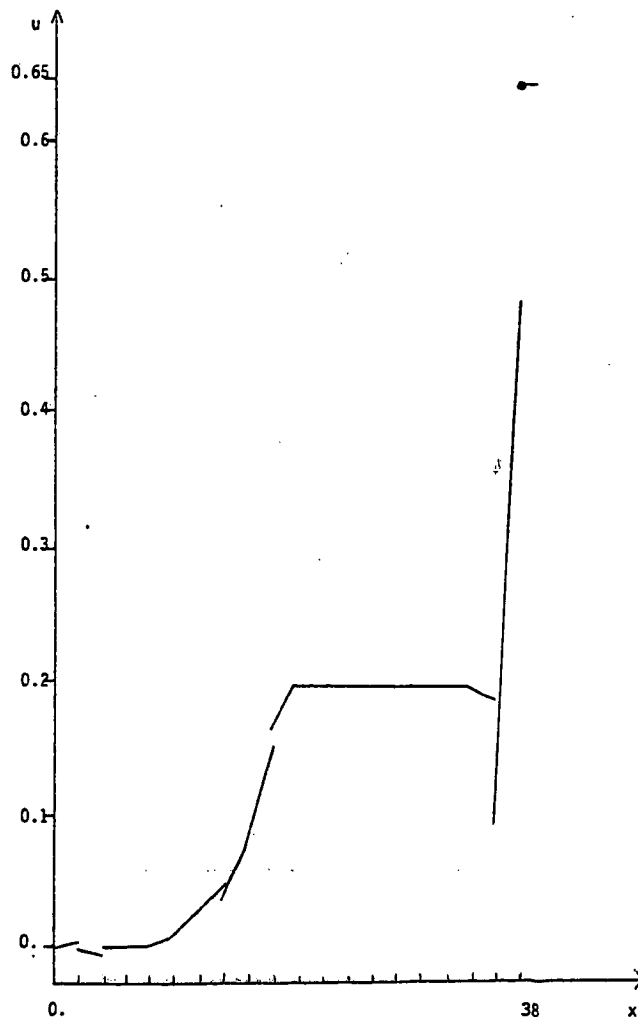


Figure 35. Exemple 4.
 $t=1000 \quad \Delta t=2$

Exemple 5 :

Avec les données (1.8), (6.8), (8.8), (10.8) on impose une injection d'eau dans le haut du barreau, qui est plein d'huile et qui est en contact, en bas, avec l'eau. Les solutions aux temps $t=1600$ et $t=4000$ sec. sont dessinées respectivement sur les figures 36 et 37. La concentration de l'eau augmente de plus en plus dans le barreau, et l'huile en est chassée. Dans le bas, l'eau rentre dans le barreau dans les premiers instants, puis elle sort de plus en plus.



Figure 36. Exemple 5
 $t=1600$ $\Delta t=8$

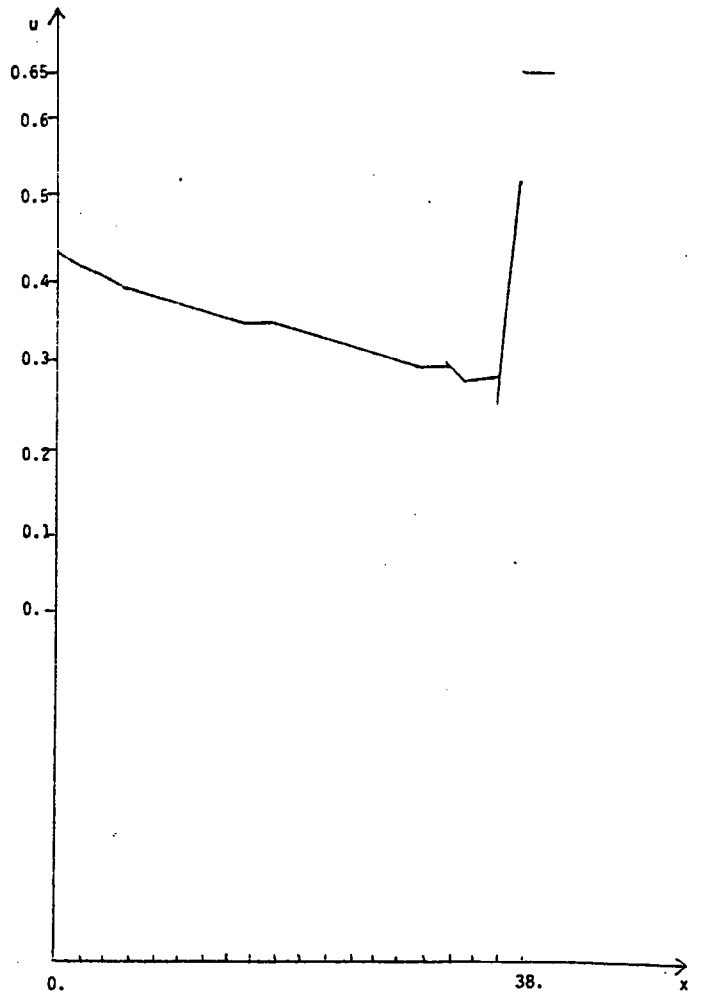


Figure 37. Exemple 5.
 $t=4000$ $\Delta t=8$

Exemple 6 :

Avec les données (1.8), (6.8), (9.8), (10.8) on injecte par le haut de l'eau et en bas on empêche l'eau de sortir tant que la saturation en eau n'est pas maximale. Sur les figures 38, 39 et 40 on a représenté les solutions calculées aux temps $t=500$, 1500 , 2500 et sur la figure 41 on a dessiné le débit d'huile à la sortie. L'eau commence à sortir du barreau à l'instant $t=2281$ s. De plus on peut observer que la valeur calculée de la saturation sur le bord $x=a$, pour satisfaire la condition (6.8), augmente toujours, mais elle n'atteint pas la saturation maximale $u_L=0.65$. En effet, on a pour $t=2500$, $u(a)=.4232$ (cf exemple 1).

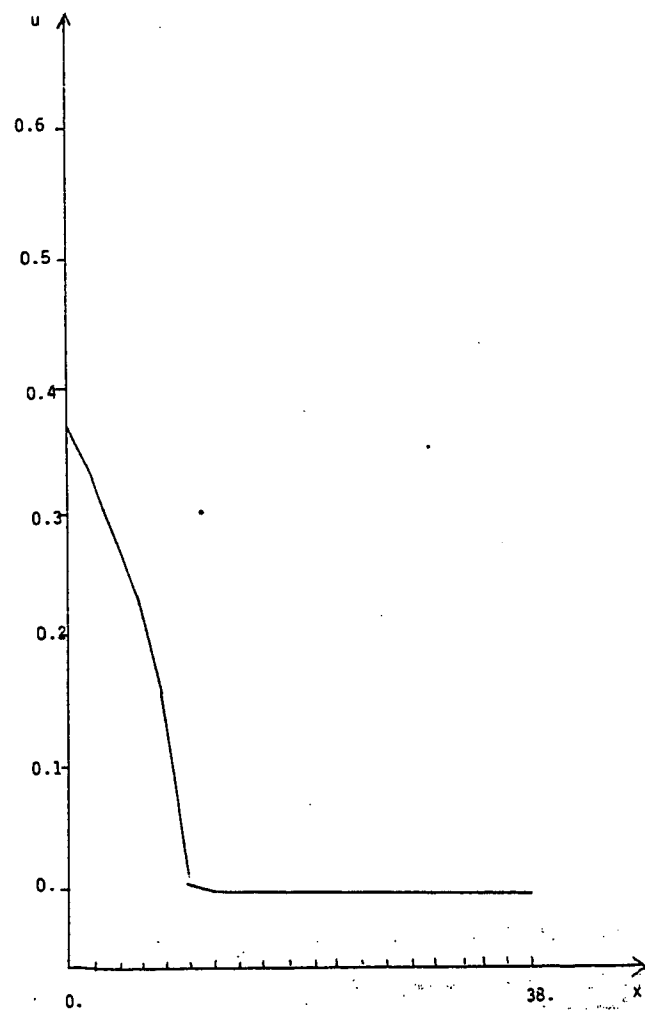


Figure 38. Exemple 6
 $t=500 \quad \Delta t=1$

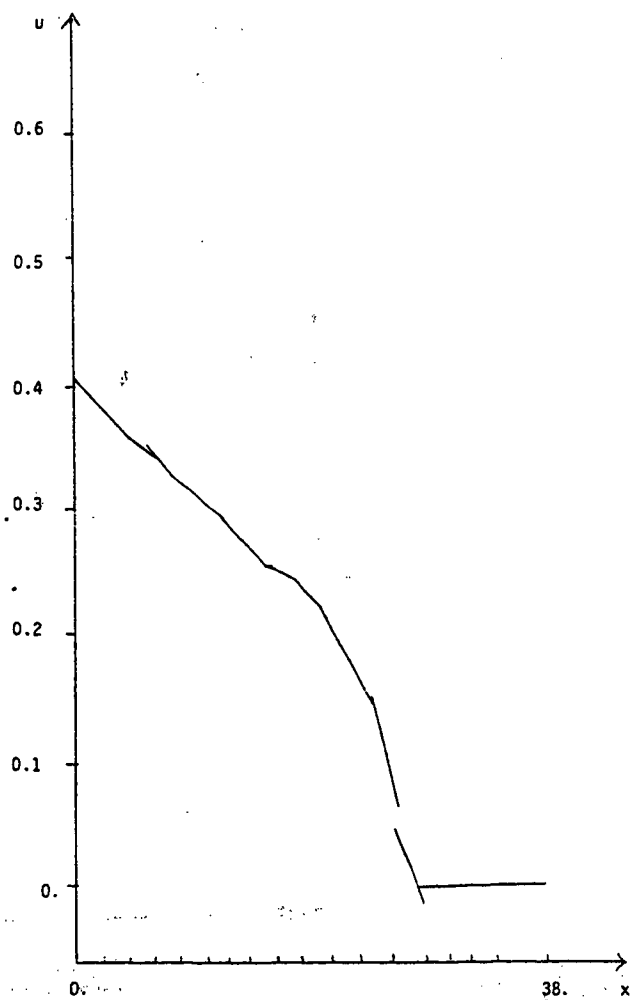


Figure 39. Exemple 6
 $t=1500 \quad \Delta t=1$

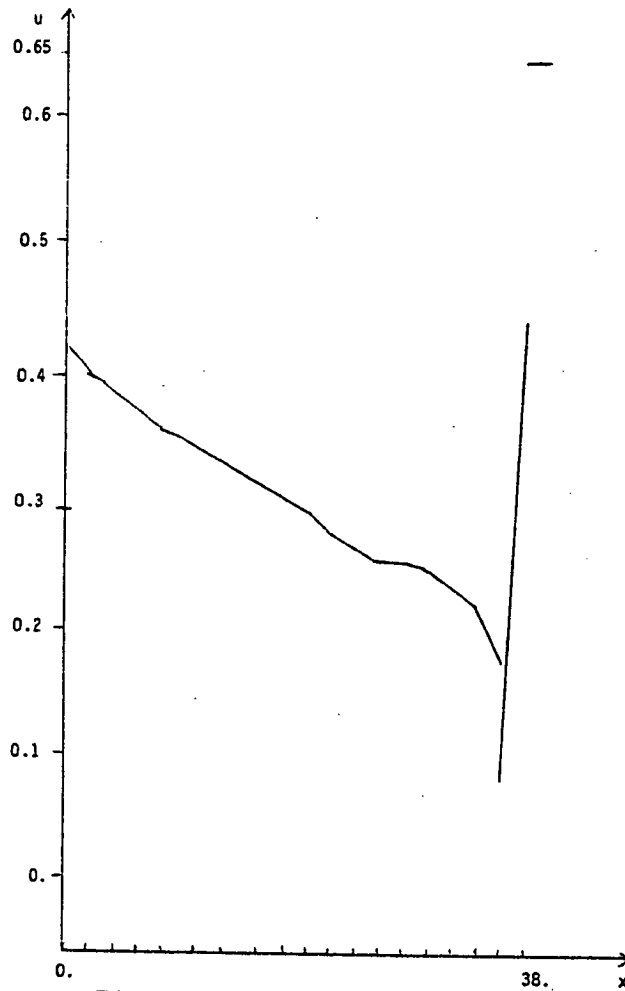


Figure 40. Exemple 6
 $t=2500$ $\Delta t=1$

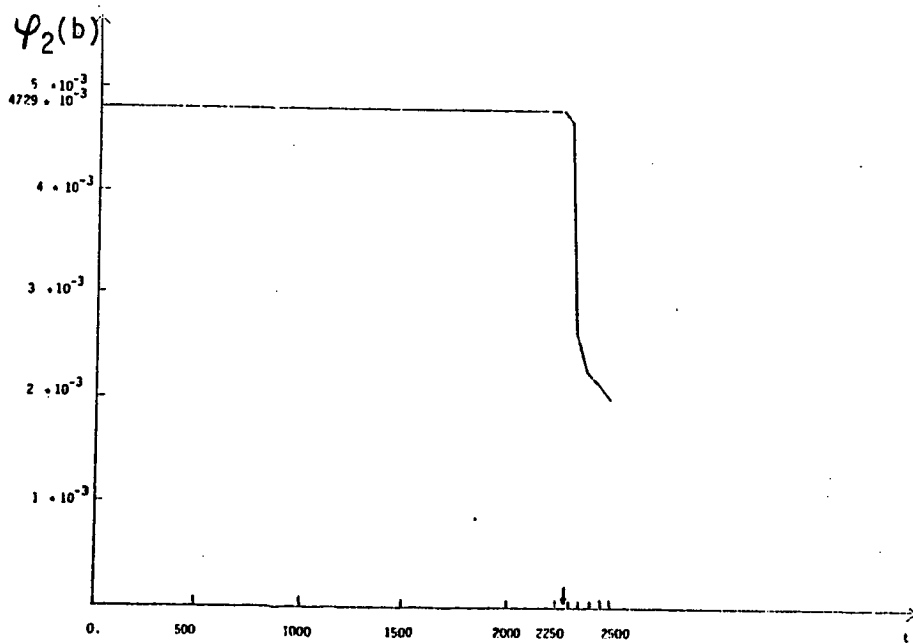


Figure 41. Exemple 6. Débit d'huile au cours du temps

Exemple 7 :

Les données ont été (2.8), (6.8), (9.8), (10.8). La configuration physique diffère de celle de l'exemple 6, du fait que le barreau est horizontal. Sur les figures 42, 43, 44 on a reporté les solutions calculées aux instants $t=1500$ et 3500 et la fonction $\varphi_2(b)$ au cours du temps. L'eau commence à sortir de l'extrémité b du barreau à l'instant $t=2660$. Comme la gravité ici ne joue pas de rôle, la saturation calculée sur le bord a est supérieure à celle calculée dans l'exemple 6. Au temps $t=2500$, on a $u(a) = .51852$.

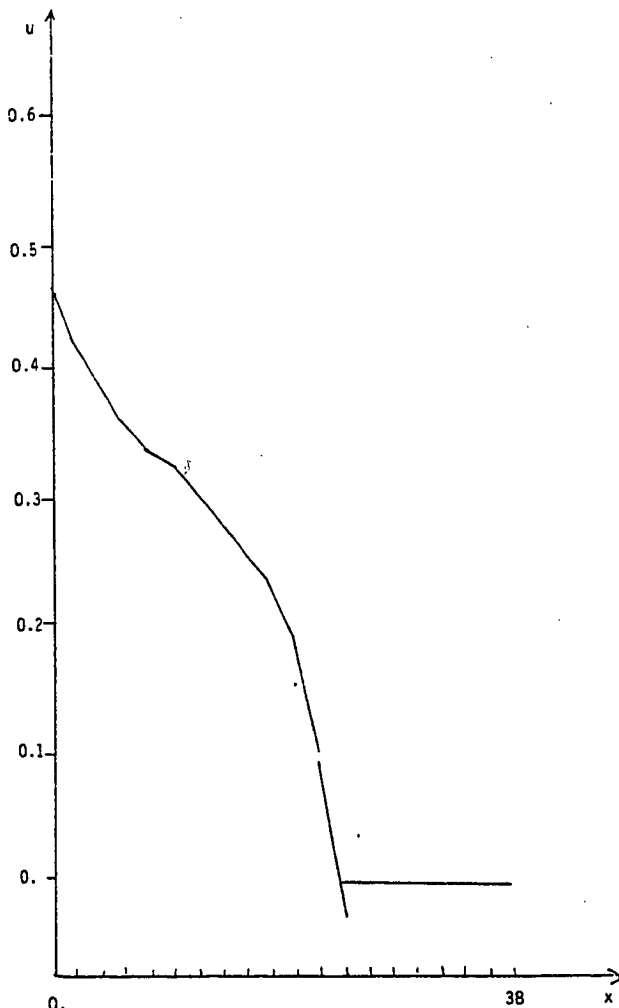


Figure 42. Exemple 7
 $t=1500$ $\Delta t=1$

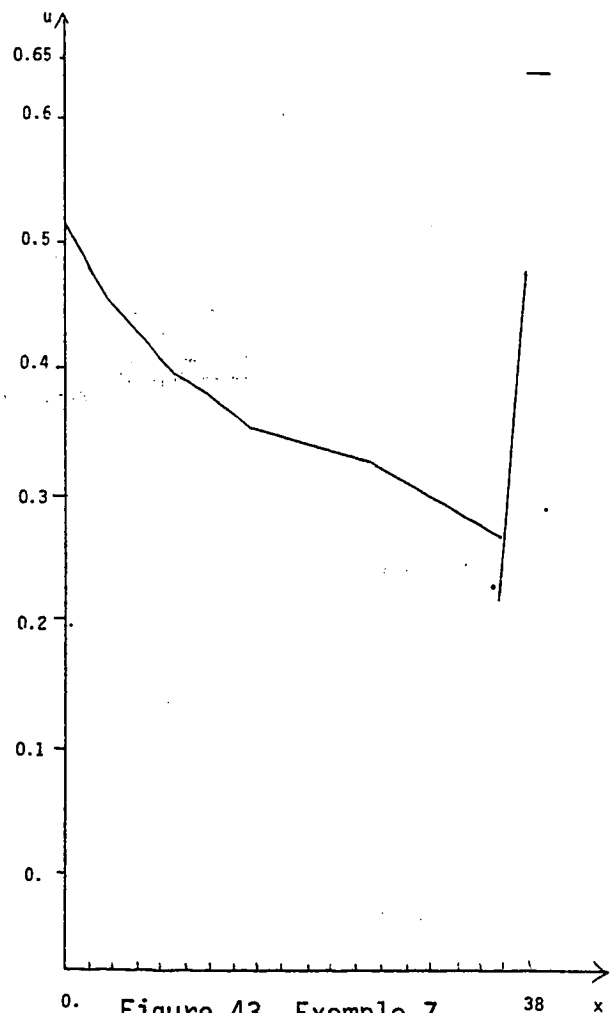


Figure 43. Exemple 7.
 $t=3500$ $\Delta t=1$

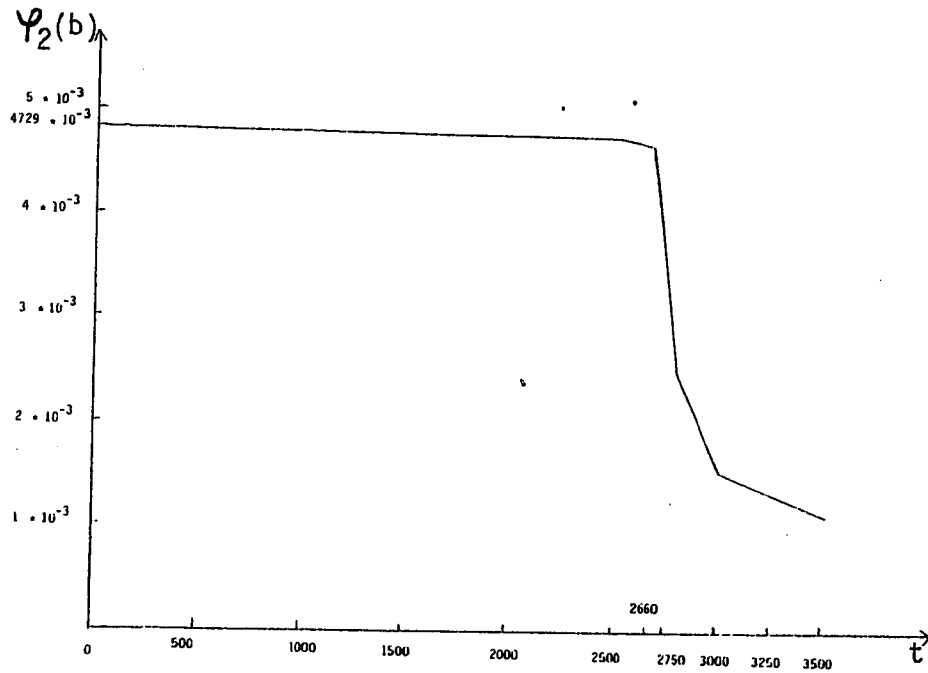


Figure 44. Exemple 7. Débit d'huile au cours du temps

Exemple 8 :

Les données ont été (3.8), (6.8), (9.8), (10.8). Dans ce cas, l'eau est injectée par le bas. Sur les figures 45, 46. et 47 sont dessinées les solutions calculées aux temps $t=1500$ et 3500 et la fonction $\varphi_2(b)$ au cours du temps. L'eau commence à sortir par le haut à l'instant $t=3037$. Par effet de la gravité, la saturation calculée en a , pour satisfaire la condition (5.3), est supérieure à celle des exemples 6 et 7 ; ici, au temps $t=2500$ sec., on a $u(a)=.60245$ et au temps $t=3500$ sec., on a $u(a) = .6286$.

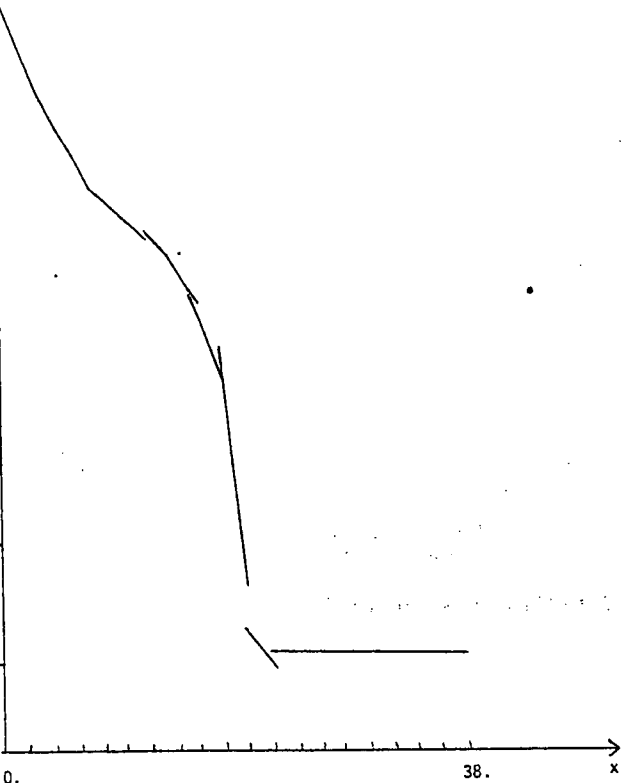


Figure 45. Exemple 8.
 $t=1500$ $\Delta t=1$

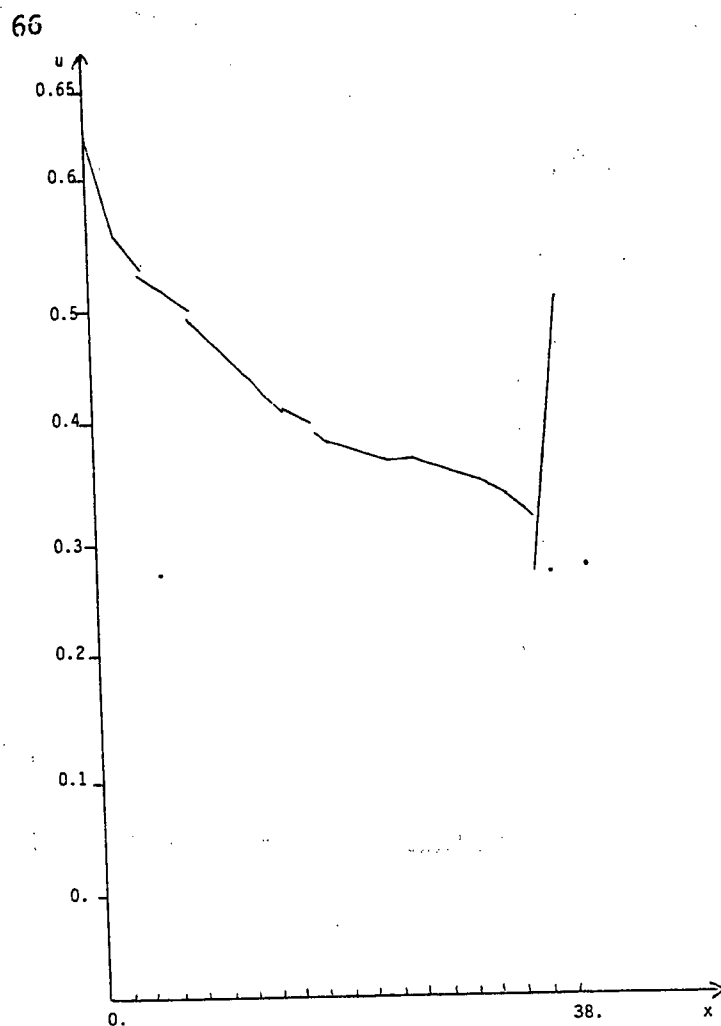


Figure 46. Exemple 8.
 $t=3500$ $\Delta t=1$

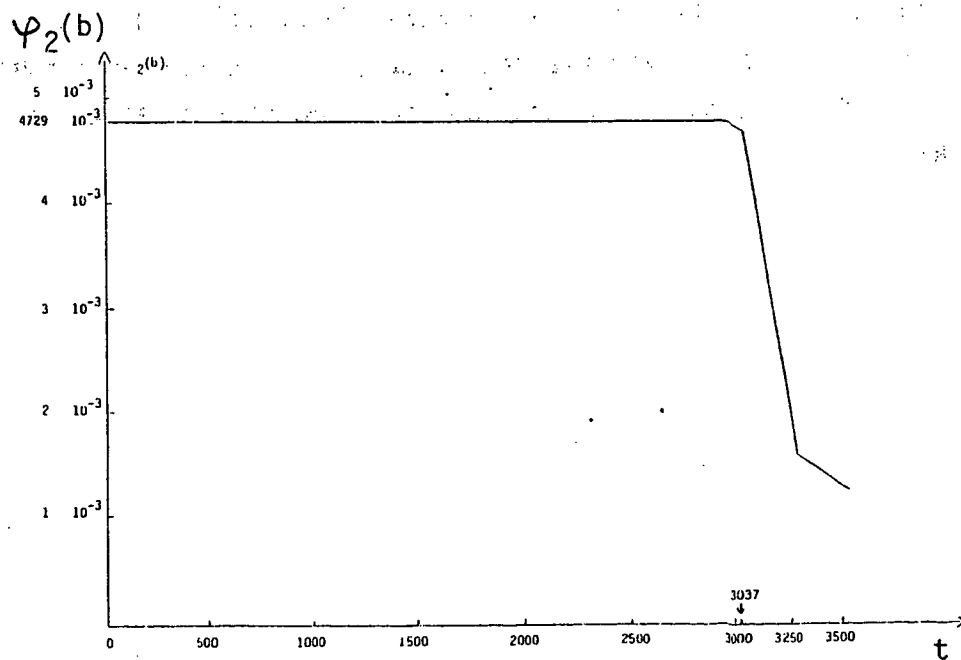


Figure 47. Exemple 8. Débit d'huile au cours du temps

Il est intéressant de comparer les figures 39, 42 et 45 pour voir l'effet de la gravité sur l'avancement du front, ainsi que les figures 41, 44 et 47, pour noter les différences entre les débits d'huile à la sortie dans les trois exemples 6, 7, 8.

TEMPS DE CALCUL

Le temps de calcul dépend beaucoup du type de conditions aux bords qu'on assigne. En employant toujours $\Delta x=2$, on a obtenu, pour le cas (D_a, D_b) , un temps de 0.0105 sec. (IBM 370-168) par pas de temps, tandis que pour le cas (E_a, U_b) on a obtenu un temps de 0.0201 sec. par pas de temps. Même si il est plus lent, ce cas est de toute façon le plus intéressant du point de vue physique.

BIBLIOGRAPHIE

G. CHAVENT

- [1] "A new formulation of diphasic incompressible flows in porous media" - Lecture Notes in Mathematics - Vol. 503 - Springer - 1976
- [2] "About the identification and modelling of miscible or immiscible displacement in porous media" - Lecture Notes in Control and Information Science - Vol. 1 - Springer - 1978

G. CHAVENT, G. COHEN

- [1] "Numerical approximation and identification in a 1-D parabolic degenerated non linear diffusion and transport equation" - Lecture Notes in Control and Information Sciences - Vol. 6 - Springer - 1978.

G. COHEN

- [1] "Résolution numérique et identification pour une équation quasi-parabolique non linéaire dégénérée de diffusion et de transport en dimension 1" - Thèse de 3ème cycle - 1978.

S.N. KRZKOV

- [1] "Generalized solutions for the Cauchy problem in the large for non linear equation of first order" - Soviet. Math. Dokl. 10 - 1969- p 785-788.

P. LESAINT, P.A. RAVIART

- [1] "On a finite element method for solving the neutron transport equation" - Symposium on Mathematical aspects of finite elements in P.D.E. - Math. Reserach Center - University of Wisconsin - Madison 1974.

A.Y. LEROUX

- [1] "Approximation de quelques problèmes hyperboliques non linéaires" - Thèse - Université de Rennes - 1977.
- [2] "A numerical conception of entropy for quasi-linear equations" - Math. Comp. 31 (140) - p 848,872 - 1977.

C. MARLE

- [1] Cours de production. Tome IV, Edition 1965, Technip.

P.A. RAVIART, J.M. THOMAS

- [1] "A mixed finite element method for second order elliptic problem" - Lecture notes in Mathematics - Vol. 606 - Springer - 1977.

